RODRIGO NUNES MAHFUZ

ANÁLISE DE MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do diploma de Engenheiro de Produção

São Paulo
2008

RODRIGO NUNES MAHFUZ

ANÁLISE DE MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Trabalho de Formatura apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do diploma de Engenheiro de Produção

Orientador:
Prof: Melvin Cymbalista

São Paulo
2008

FICHA CATALOGRÁFICA

Mahfuz, Rodrigo Nunes

Análise de Modelos de Precificação de Opções / Rodrigo Nunes Mahfuz – São Paulo, 2008.

114p.

Trabalho de Formatura – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1.Opções 2.Modelos de Precificação 3.Sistemas Computacionais I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Produção II.t.

Dedico este trabalho aos meus pais e
a minha namorada, que mais
contribuíram para que eu me tornasse
um Engenheiro de Produção.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Aos meus familiares que sempre estiveram ao meu lado.

Ao meu orientador Prof: Melvin Cymbalista por seus conselhos, paciência e cobranças.

Aos meus amigos de faculdade, pois sem eles seria impossível chegar ao fim desta jornada.

Aos meus colegas de trabalho que sempre estiveram dispostos a contribuir.

RESUMO

O presente trabalho dispõe de uma das mais difíceis missões do mercado financeiro: a precificação de contratos de opções. Ao longo dos anos, esse mercado vem crescendo e tornando-se cada vez mais complexo, por isso há uma constante necessidade da criação de modelos matemáticos e estatísticos, cada vez mais elaborados. Conforme esses modelos ficam mais complexos, cresce uma necessidade de ferramentas mais avançadas para sua utilização.

Este projeto consiste na análise e comparação de modelos numéricos e fórmulas fechadas para se precificar opções. O objetivo do trabalho é averiguar se com o recurso computacional hoje existente é possível abandonar a busca por fórmulas fechadas e focar em modelos numéricos.

Como subproduto do trabalho teremos o *software* SiPA (Sistema de Precificações Avançadas), desenvolvido para precificar opções com cada um dos modelos aqui estudados.

ABSTRACT

This work deals with one of the most difficult tasks of the financial market: options pricing. For years this market is growing and becoming more and more complex, so there is a constant need for the development of mathematical and statistical models. As this models get more complex, the needs for a complex tool to operate the models rise also.

This project consists of the analysis and comparison of numerical models and closed formulas to price options. The objective is to verify whether the computer resources available today it is possible to abandon the search for closed formulas and focus on numerical models.

As a byproduct of the work we have the software SiPA (Advanced Pricing System), designed to price options with each of the models studied here.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este é o capítulo inicial do ambicioso projeto em que está envolvido este trabalho de formatura. Para começar, a empresa onde o trabalho foi desenvolvido é brevemente apresentada. Em seguida, o problema a ser esclarecido por este documento é descrito. Por fim, mostra-se a estrutura do trabalho de forma esquemática, facilitando assim o entendimento por parte do leitor.

1.1 A EMPRESA

Este trabalho foi realizado em um banco internacional de grande porte, o Banco BNP Paribas Brasil. O Banco BNP Paribas é um dos maiores bancos da França, presente em mais de 85 países. No Brasil, desenvolve atividades, principalmente no âmbito de banco de investimento, há mais de 10 anos. O banco é o resultado da união de dois outros, o BNP (*Banque Nationale de Paris*) e o Paribas, que ocorreu em 1997.

O banco está dividido, basicamente, em três *core business* (Private Banking & Asset Management; Banco de Investimento; Banco de Varejo) que ao longo de seus anos de atuação obtiveram grande destaques:

Banco BNP Paribas no Mundo	
Private Banking & Asset Management	▪280 bilhões de Euros em ativos sob gestão ▪ Private banking 11 bilhões em ativos sob gestão, top 10 mundial ▪ Seguro: top 4 na França para seguro de vida ▪ Nº 1 na Europa em Custódia
Banco de Investimento	▪Líder mundial em financiamento de commodities ▪ Top 5 mundial em equity derivatives ▪ Top 5 mundial em project finance ▪ 7º arranger mundial para empréstimos sindicados
Banco de Varejo	▪Mais de 2000 agências (Na França) ▪ Mais de 5 milhões de clientes individuais (Na França) ▪ Líder de mercado em Internet Banking

Tab1.1 Divisão do Banco BNP Paribas no Mundo

Fonte: Banco BNP Paribas

As demonstrações de resultado do primeiro quarto de 2008 mostram um lucro líquido de € 7,395 milhões, um resultado operacional de € 2,790 milhões e um lucro líquido por ação de € 1,981 milhões. O banco é um dos únicos que sobreviveram sem muitas perdas durante a chamada crise do *subprime*, mantendo seu rating AA+ pela *Standard & Poor's.*

No mundo, a empresa possui mais de 160 mil funcionários, que estão distribuídos segundo o quadro abaixo.

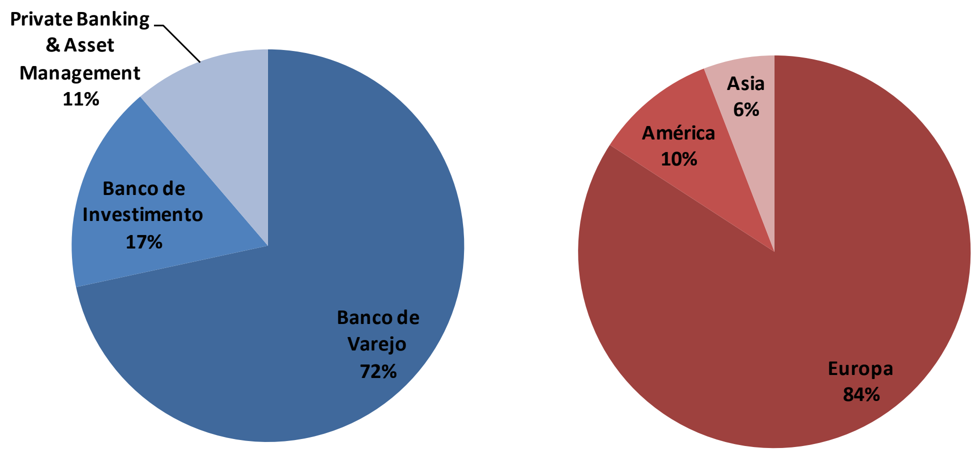

Fig1.1 Divisão dos Colaboradores do BNPP no mundo (Por *Business* e Por Localização)

Fonte: Banco BNP Paribas

Apesar de este trabalho não ter relação com nenhuma melhoria direta para banco, ou seja, de o banco não fazer parte do escopo do trabalho, é importante frisar que o estágio que foi realizado na mesa de *Sales* de *Fixed Income* da Tesouraria foi de extrema relevância para o resultado final do trabalho, por facilitar a obtenção de informações.

No quadro a seguir temos um comparativo do BNPP com diversos outros bancos, ferramenta muito útil para situar o banco junto ao cenário mundial do setor. Este quadro representa o fechamento do dia 18 de Junho de 2008 e o BNPP encontra-se em 10º lugar por ordem de *Market Cap*, chegando a quase USD 87 Bi de valor de mercado.

Market Cap Rank	Bank Name	Country	One Day Change	One Month Change	Six Months Change	One Year Change	Market Cap (USD Bi)
1	IND & COMM BK -H	CHINA	1.64%	-9.12%	0.72%	25.68%	252.3
2	CHINA CONST BA-H	CHINA	0.78%	-8.35%	-2.26%	23.43%	194.8
3	HSBC HLDGS PLC	BRITAIN	-1.36%	-8.58%	-1.63%	-12.41%	191.8
4	BANK OF CHINA-H	CHINA	4.16%	-5.65%	0.52%	-3.76%	148.5
5	JPMORGAN CHASE	UNITED STATES	-0.77%	-16.74%	-11.75%	-23.18%	134.8
6	BANK OF AMERICA	UNITED STATES	-2.98%	-21.57%	-31.64%	-43.16%	126.3
7	BANCO SANTANDER	SPAIN	-2.34%	-14.52%	-15.47%	-12.55%	117.8
8	CITIGROUP INC	UNITED STATES	-0.29%	-11.77%	-32.85%	-62.19%	110.7
9	MITSUBISHI UFJ F	JAPAN	-0.28%	-0.65%	4.46%	-23.62%	108.4
10	BNP PARIBAS	FRANCE	-2.92%	-11.81%	-15.72%	-32.39%	86.9
11	WELLS FARGO & CO	UNITED STATES	0.12%	-12.16%	-16.13%	-29.64%	84.0
12	UNICREDIT SPA	ITALY	-1.71%	-14.22%	-28.04%	-41.62%	83.8
13	ALLIANZ SE-REG	GERMANY	-1.15%	-9.87%	-17.85%	-32.95%	82.0
14	ING GROEP NV-CVA	NETHERLANDS	-2.75%	-11.92%	-15.11%	-32.79%	78.2
15	GOLDMAN SACHS GP	UNITED STATES	1.86%	-2.34%	-9.30%	-19.47%	78.2
16	BBVA	SPAIN	-2.08%	-13.65%	-21.67%	-28.60%	76.6
17	ROYAL BK SCOTLAN	BRITAIN	-4.97%	-13.98%	-37.04%	-58.59%	72.6
18	UBS AG-REG	SWITZERLAND	-3.95%	-17.49%	-48.02%	-64.21%	70.1
19	SUMITOMO MITSUI	JAPAN	1.62%	6.46%	13.39%	-21.67%	68.8
20	BANCO ITAU-PREF	BRAZIL	-3.49%	-4.35%	-2.73%	3.66%	64.3
21	BRADESCO SA-PREF	BRAZIL	-2.22%	-6.89%	-3.90%	8.79%	64.0
22	MIZUHO FINANCIAL	JAPAN	0.35%	2.52%	7.75%	-36.17%	60.2
23	BANK OF COMMUN-H	CHINA	1.83%	-13.53%	-12.08%	12.22%	58.2
24	CREDIT SUISS-REG	SWITZERLAND	-2.00%	-12.40%	-26.88%	-45.70%	55.6
25	SOC GENERALE	FRANCE	-3.12%	-19.10%	-37.34%	-56.96%	52.7

Fig1.2 Classificação mundial dos Bancos segundo Market Cap

Fonte: Bloomberg

1.2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Para descrever o problema envolvido neste trabalho será apresentado, em um primeiro momento, um exemplo prático para o leitor compreender melhor o que é uma opção, Esse assunto é discutido mais profundamente durante a revisão bibliográfica (Capítulo 2).

Uma empresa do ramo farmacêutico, X, está interessada em comprar uma empresa do setor, Y. Entretanto, X não tem condições de fazer essa aquisição no presente momento, porém calcula que em um ano terá dinheiro suficiente para realizar o negócio. A empresa Y vale hoje R$ 10 milhões, todavia, está realizando uma grandiosa pesquisa, e se o produto que ela está desenvolvendo der certo, poderá chegar a valer o dobro no período de um ano. A empresa X tem muito interesse no negócio, então propõe pagar para a empresa Y um prêmio que daria a opção de realizar o negócio daqui a um ano por R$ 10 milhões. Quanto vale este prêmio?

Analisando o exemplo, podemos perceber que a empresa X tem muito interesse em comprar a empresa Y, mas não quer correr o risco de ter de pagar o dobro do que ela vale atualmente. Obviamente, o prêmio tem alta correlação com a probabilidade de a empresa Y desenvolver o novo produto. No mercado financeiro esse tipo de opção é chamado de *Real Option*. A resolução desses tipo de problema é altamente complexa e foge do escopo deste trabalho, porém esse é um ótimo exemplo para se entender os problemas e desafios encontrados na precificação de uma opção.

O objetivo do trabalho é realizar uma análise sobre os principais modelos de precificação de opções, ou seja, o melhor modelo que possa achar o valor desse "prêmio", contudo, os ativos objeto serão os negociados em bolsas, podendo ser: ações, commodities, índices, taxa de juros, etc.

Para auxiliar a análise dos modelos foi criado um *software* por meio do uso do Microsoft Excel, que é capaz de obter o preço para diferentes tipos e opções, utilizando modelos matemáticos e numéricos, como o de *Black and Scholes*, da árvore Binomial, da árvore Trinomial e o da simulação de Monte Carlo.

Será feita uma análise para se determinar até que ponto é vantajoso o uso de um modelo fechado (*Black and Scholes*) ao invés de um modelo numérico (árvore Binomial, árvore Trinomial e Monte Carlo). O modelo fechado tem menos possibilidades de customização, todavia utiliza menos recursos computacionais.

Quando o modelo de *Black and Scholes* foi descrito, em 1973, não existiam recursos computacionais para permitir o uso de modelos numéricos. Os métodos numéricos têm uma possibilidade de customização muito maior e, basicamente, deseja-se descobrir se com os recursos computacionais existentes atualmente, vale a pena o uso dos métodos numérico, ou devemos permanecer tentando achar fórmulas fechadas para cada caso.

1.3 JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

O tema do trabalho foi escolhido devido ao interesse do aluno nas disciplinas de economia, TI, estatística e pesquisa operacional, além de um interesse grande no mercado de opções. É bem verdade que não existe nada no curso de Engenharia de Produção que aborde a temática de opções, porém o escopo do trabalho não são as opções, mas sim os métodos matemáticos para se precificá-las. Alguns dos métodos são altamente complexos, e só seria possível compreendê-los com uma boa base acadêmica.

Há uma convicção por parte do aluno de que seria praticamente impossível realizar um trabalho de tamanha complexidade sem ter cursado de Engenharia de Produção na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

No primeiro momento o curso auxiliou no desenvolvimento do *Software* SiPA, pois graças às disciplinas de TI, foi possível obter os passos que deveriam ser realizados nesta tarefa.

As aulas de estatística foram úteis para a comparação das variáveis, principalmente para no uso da análise de variância. Além disso, deve-se frisar a importância da estatística para a compreensão não só dos modelos de precificação, mas também dos conceitos de opção em si.

As aulas de pesquisa operacional serviram para guiar o aluno na escolha das variáveis. Além disso, por intermédio dessa disciplina, houve o primeiro contato com modelos numéricos, como as simulações de Monte Carlo. Por fim, essa disciplina teve um trabalho em que o contato com a estrutura de VBA do *Excel* se fez necessário, pois apesar do conhecimento de programação ser apresentado em Introdução à Computação, o aluno nunca tinha antes utilizado o VBA. Desse modo, esse conhecimento específico foi muito útil para o desenvolvimento do SiPA.

Além disso, o estágio na tesouraria do BNPP traz para o aluno informações que são extremamente difíceis de serem obtidas, mesmo em livros especializados no assunto. Algumas delas só podem ser adquiridas com a prática. A escolha do tema também se deve ao fato de que, assim, seria possível a realização do trabalho de formatura em paralelo ao estágio.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está dividido em seis capítulos, apresentados da seguinte maneira:

Estrutura dos Capítulos	
Capítulo 1 - Introdução	Tem a função principal de mostrar ao leitor o conteúdo geral do trabalho. Com esse intuito, o capítulo, aborta tópicos como: Estágio, Descrição do problema, Justificativa e Estrutura do Trabalho
Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica	Esse é o mais extenso dos capítulos, em que são apresentados os conceitos utilizados ao longo do trabalho. Esta parte mostra a definição de todos os tipos de opção que o SiPA precifica.
Capítulo 3 - Metodologia de Trabalho	Esse capítulo explica em detalhes a forma como o problema foi tratado e solucionado.
Capítulo 4 - Desenvolvimento do SiPA	Nesta parte, demonstram-se todos os passos que levaram à construção do software. Também trabalha-se como a idéia dessa ferramenta computacional foi formulada e todos os passos seguintes desse processo de concebimento.
Capítulo 5 – Análise dos Modelos	Esse capítulo tem como objetivo mostrar como foi realizada a comparação entre os modelos.
Capítulo 6 - Conclusão	Enfim, apresenta-se o fechamento do projeto

Tab1.2 Estrutura dos Capítulos do Trabalho

Fonte: Elaborado pelo Autor

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O mercado financeiro é altamente dinâmico, muitos conceitos sofrem constantemente revisões e aperfeiçoamentos. Entretanto, na sua essência, as premissas básicas desse mercado continuam as mesmas e, provavelmente irão permanecer válidas por muito tempo.

Este capítulo tem como função a revisão de tais conceitos, principalmente os que envolvem derivativos; afinal as opções, que fazem parte do tema principal deste trabalho são um tipo de derivativo.

O capítulo começa com uma breve descrição desses instrumentos financeiros, depois apresentam-se, em mais detalhes, os principais tipos de contratos: Termos, Futuros e Swaps. Então, focam-se dois tipos de opções: *Plain Vanillas* e com Barreiras. Na seqüência, os modelos de precificação de opções utilizados na análise são descritos.

A partir de tudo isso, algumas explicações básicas sobre programação, linguagem *Visual Basic* e interface gráfica serão dadas para permitir uma compreensão melhor da proposta a ser apresentada.

Finalmente, os conceitos estatísticos usados na comparação dos resultados são apresentados.

2.1 DERIVATIVOS

Warren Buffett (famoso investidor americano) uma vez descreveu os derivativos utilizados de forma especulativa como "armas financeiras de destruição em massa"

A definição mais comum de derivativos é: "um instrumento cujo preço depende, ou é derivado, do preço de outro ativo mais básico". (FORTUNA, 2005, p.633). Esse ativo mais básico é chamado de ativo-objeto. Como a maioria dos ativos do mercado financeiro, um investidor em derivativos pode assumir uma posição comprada *(long)* ou vendida *(short)*.

O mercado de derivativos vem crescendo de modo constante desde a década de 70, principalmente. Hoje em dia, eles são negociados ativamente ao redor do mundo. Existem derivativos dependentes dos mais diversos ativos, desde ações até eletricidade ou clima. Existem também diversos níveis de sofisticação dos derivativos, dos instrumentos *plain vanilla* (derivativos mais simples, sem nenhuma característica diferente ou sofisticação) até as opções exóticas (HULL, 1999, p.20).

Abaixo encontra-se uma tabela contendo os principais tipos de derivativos encontrados no mercado.

Principais Tipos de Derivativos		
Tipo	**Descrição**	**Exemplo**
Termos / Futuros	São instrumentos que dão ao investidor o dever de comprar ou vender um ativo em determinado momento do futuro	Um importador de carros compra um automóvel que será entregue daqui a dois meses. Ele deve fazer o pagamento em dólares, mas tem medo que a cotação da moeda suba. Para se proteger da variação cambial, este importador pode comprar dólares no mercado futuro
Swaps	São instrumentos que permitem a troca de fluxo de caixa	Uma companhia tem recebíveis atrelados à inflação, mais especificamente ao IPCA. Essa empresa tem seus custos indexados a CDI. Para evitar um descasamento entre os custos e recebíveis, essa empresa pode "swapar" (trocar) o que recebe em IPCA por CDI. Chamado Swap IPCAxCDI

Principais Tipos de Derivativos (Cont.)		
Tipo	**Descrição**	**Exemplo**
Opções	São instrumentos que dão ao investidor o direito, mas não o dever, de comprar ou vender um ativo em determinado momento no futuro	Um agricultor não tem certeza sobre o tamanho de sua colheita este ano. Se utilizar os Futuros para garantir seu faturamento ele pode sofrer prejuízos, caso não entregue toda a produção. Mesmo assim, como há necessidade de se proteger, o agricultor compra uma Opção de Venda de sua produção, pagando um prêmio por esse benefício de ter o direito de venda, mas não a obrigação.

Tab2.1 Principais Tipos de Derivativos

Fonte: Elaborado pelo Autor

Esses instrumentos podem ser usados, basicamente, para três propósitos: *Hedging*, Especulação e Arbitragem. Abaixo encontra-se um quadro resumo desses três tipos de utilização do mercado de derivativo.

Utilização do Mercado de Derivativos		
Tipo	**Descrição**	**Exemplo**
Hedge	O investidor busca transferir ou eliminar riscos de outras operações financeiras	Um importador irá, daqui a dois meses, pagar dólares referentes à compra de um produto do exterior. Preocupado com a possibilidade de apreciação do dólar o importador pode comprar contratos futuros de dólar, definindo assim, a taxa que será utilizada daqui a dois meses para realizar o pagamento
Especulação	O investidor busca obter lucros relativos à valorização (ou desvalorização) de algum ativo	Um especulador tem a visão de que certo ativo não irá se desvalorizar mais do que 30% em um prazo de três meses. Esta pessoa então vender contratos de Opções de Venda (*Put*) com preço de exercício de 70% do valor atual do ativo e com prazo de três meses
Arbitragem	O investidor procura obter lucros sem correr nenhum risco	O valor do contrato futuro de uma ação pode ser calculado de forma que valha menos do que o justo, então um investidor pode comprar o futuro, vender à vista e aplicar este dinheiro durante o tempo de maturidade do contrato futuro A *precificação de um derivativo busca a eliminação das oportunidades de arbitragem*

Tab2.2 Utilização do Mercado de Derivativos

Fonte: Elaborado pelo Autor

2.1.1 Termos e Futuros

Os contratos a Termo (*Forward)* e Futuro (*Future)* têm basicamente a mesma função, permitir a um investidor comprar ou vender um ativo em um momento específico no futuro. Esse tipo de contrato nasceu com a necessidade de produtores de *commodities* garantirem a venda de sua produção por um determinado valor.

O princípio de funcionamento desse tipo de derivativo funda-se no fato de que nenhuma das partes tem de pagar nada para adquiri-lo (com exceção da margem em contratos futuros); ou seja, o contrato simplesmente dita que, no futuro, determinado ativo será negociado por certo valor.

Na maioria desses contratos, a liquidação, na data futura é somente financeira, ou seja, só será paga a diferença do preço futuro negociado para o preço à vista na data futura.

Existem algumas diferenças cruciais entre os contratos a Termo e os Contratos futuros, como demonstrou HULL (1999):

Diferenças entre Contratos a Termo e Contratos Futuros

A Termo	Futuro
Contrato Particular entre duas partes	Negociado em Bolsa
Não-Padronizado	Padronizado
Uma só data de entrega acordada	Várias datas de entrega
Ajustado no vencimento	Ajustado diariamente
Entrega ou liquidação financeira final	Geralmente encerrado antes do vencimento

Tab2.3 Comparação entre Termo e Futuro

Fonte: Adaptado de HULL (1999, p.45)

Para se precificar contratos futuros deve-se levar em conta somente a taxa de juros praticada, pois, em caso contrário, os investidores teriam oportunidades de arbitragem com estes contratos.

2.1.2 Swaps

Swap é um derivativo relativamente novo, mas que vem tomando cada vez mais importância no cenário financeiro.

Sua lógica é baseada na possibilidade de trocar um determinado fluxo de caixa por outro. Por exemplo, uma empresa A tem de pagar semestralmente juros de um empréstimo. Este juros são de 100% do CDI (Taxa Flutuante) sobre do principal da operação, porém a empresa quer transformar este passivo para uma taxa Pré fixada. Esse swap é chamado no mercado de Swap PRExDI.

Então a empresa A entra em acordo com uma contraparte B (usualmente um Banco), sendo que receberá dela o equivalente a 100% do CDI (para pagar o empréstimo), e pagará uma taxa pré-fixada em cima do principal da dívida.

Desta forma a empresa A estará pagando uma taxa pré-fixada pelo seu empréstimo.

2.1.3 Opções

As opções são apenas um dos tipos de derivativos existentes. Porém, não se pode deixar de notar sua importância nos mercados financeiros atuais. No mundo inteiro, grandes volumes de opções são negociados diariamente.

Para a completa compreensão do que será explicado adiante, é necessário que sejam entendidos alguns termos e definições:

São tipos de opções, definidos por HULL (2005):

- **Opção de Compra ou *Call*:** dá ao detentor do título (titular) o direito de comprar o ativo objeto por um certo preço (preço de exercício ou *strike*) em uma certa data (data de maturidade ou exercício). Por outro lado, o emissor deste título vai ter a obrigação de vender este mesmo ativo objeto (ou fazer os ajustes financeiros necessários) se desejado pelo titular.

- **Opção de Venda ou *Put*:** semelhante à opção de compra, só que desta vez, o titular terá o direito de vender a opção e o emissor terá de comprá-la, se assim desejado pelo titular.

São estilos de opções:

- **Opção Européia:** aquela que só pode ser exercida na data de exercício.
- **Opção Americana:** aquela que pode ser exercida em qualquer data até a maturidade.

As Opções mais simples e mais comuns do mercado são as chamadas *Plain Vanilla*, segundo as quais o comprador paga um prêmio para ter o direito de comprar ou vender (dependendo se é uma *Call* ou uma *Put*) um determinado ativo a certo preço (*Strike*) em uma data futura.

Em outras palavras, exercer uma opção nada mais é do que exercer o direito de compra (ou venda) do ativo-objeto. Isso não ocorre com futuros ou mercado a termo, onde não se paga nada para se entrar em um contrato, porém existe a obrigação de comprar (ou vender) o ativo objeto no vencimento (HULL, 1999, p. 22).

É importante saber que cada opção pode ser convertida em uma ação, ou em lotes de 100 ou 1000 delas, dependendo do contrato e da bolsa em que é negociada (FORTUNA, 2005, p. 578).

Antes de se discutirem as possibilidades de preço e lucro (*payoff*) para as opções, importa estabelecer, para todas as fórmulas: S_T = Preço à vista (*Spot*), preço final do ativo-objeto, e X = Preço de Exercício (*Strike*).

Para efeito didático, será considerada a data de maturidade para uma Opção Européia como em HULL (2005). O *payoff* para a posição de titular de uma *call* pode ser facilmente descrito por:

$$\max\,(S_T - X, 0)$$

Isso reflete o fato de que a opção só será exercida se $S_T > X$.

Por outro lado, o *payoff* do emissor (vendedor) da *call* será:

$$\min(X - S_T, 0)$$

Vale a pena destacar que se $S_T < X$ e, conseqüentemente, a opção não for exercida, o emissor ficará com o lucro do prêmio pago pela opção. Por isso, o emissor sempre espera que a opção não seja exercida.

Analogamente, os *payoffs* para as *puts* são descritos assim (HULL, 2005):

Para o titular:

$$\max(X - S_T, 0)$$

A *Put* só será exercida, ao contrário da *Call*, se $X > S_T$.

Para o emissor:

$$\min(S_T - X, 0)$$

Seguindo a mesma lógica das *calls*, se $X < S_T$ a *put* não será exercida e o emissor terá o lucro do prêmio.

As opções, e suas características apresentadas até agora, são as conhecidas como *plain vanillas*, isto é, são as básicas, negociadas em bolsa de forma ativa.

Entretanto, existe no mercado de balcão, mercado de títulos sem local físico determinado para a realização das transações de ativos customizados entre duas partes (FORTUNA, 2005), opções com características peculiares, não-padronizadas, conhecidas como opções exóticas (HULL, 2005).

É tarefa impossível classificar todas as opções exóticas existentes, dadas as diferentes características que elas podem assumir. No entanto, podem-se classificar alguns dos tipos de opções mais comuns (CLEWLOW; STRICKLAND, 1997):

- **Opções de barreira:** seu *payoff* depende de o ativo objeto atingir determinado nível (a barreira) antes do vencimento
- **Opções Asiáticas:** seu *payoff* é determinado pela média do valor do ativo objeto durante algum tempo antes do vencimento

- **Opções lookback:** seu *payoff* depende do valor máximo ou mínimo atingido pelo ativo objeto até o vencimento
  (CLEWLOW; STRICKLAND, 1997, pp. 12-15).

Na próxima seção os tipos de opção que serão utilizados na pesquisa que este trabalho se propõe estão explicados mais detalhadamente. É importante frisar que as opções aqui estudadas serão apenas as européias.

2.2 *PAYOFFS* DAS OPÇÕES PRECIFICADAS PELO SIPA

Aqui são apresentados, de forma gráfica e textual, os *payoffs* de cada opção que pode ser precificada pelo SiPA.

2.2.1 Plain Vanilla (Opções Simples)

Nesse tipo de opção, todas as curvas de receita (*Payoff*) dependem unicamente do prêmio, e da relação entre o preço do ativo-objeto na data de maturidade e o preço de exercício (*Strike*).

É importante frisar que existem quatro tipos de posições possíveis para um investidor de uma opção *Plain Vanilla*:

- Comprado (Titular) em uma Opção de Compra (*Call)*
- Vendido (Emissor) em uma Opção de Compra (*Call)*
- Comprado (Titular) em uma Opção de Venda (*Put)*
- Vendido (Emissor) em uma Opção de Venda (*Put)*

Call (Opção de Compra):

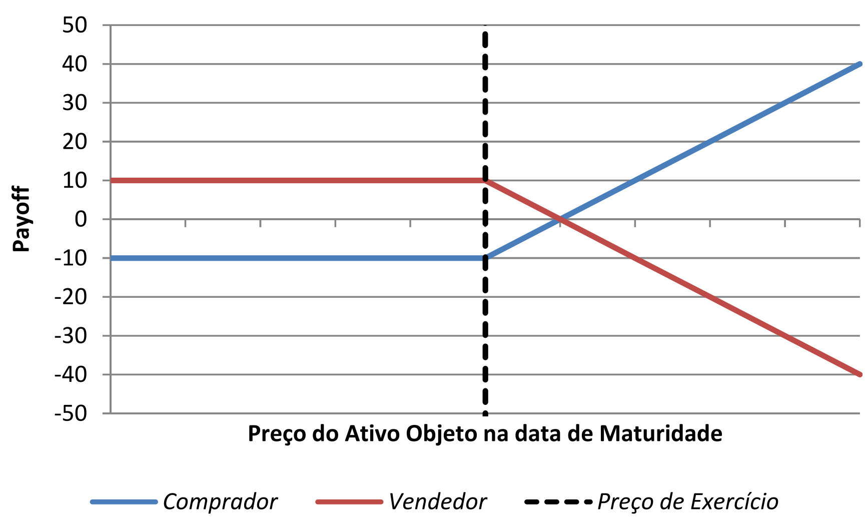

Fig2.1 *Payoff* de uma *Call Plain Vanilla*

Fonte: Elaborado pelo Autor

Pode-se observar, pelo gráfico, que o Titular da *Call* pagou um prêmio para entrar neste derivativo, ou seja, se o preço do ativo-objeto se fixar abaixo do preço de exercício (*Strike*) a única receita vai ser o pagamento do prêmio por parte do comprador e recebimento do mesmo por parte do vendedor.

Quando o ativo-objeto se fixar acima do *Strike* o comprador começa a ganhar dinheiro, mas só terá receita positiva quando este ganho superar o prêmio que foi pago. Este ponto pode ser chamado de *break even point*.

Put (Opção de Venda):

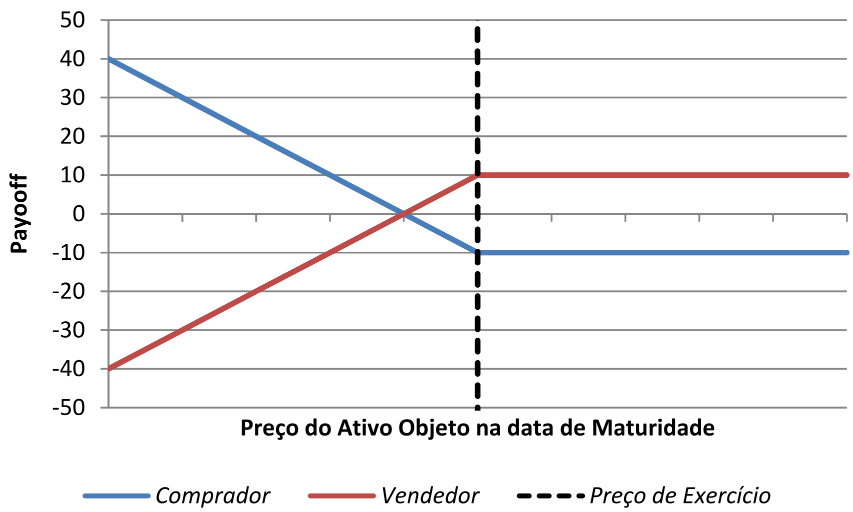

Fig2.2 *Payoff* de uma *Put Plain Vanilla*

Fonte: Elaborado pelo Autor

Pode-se observar, pelo gráfico, que o Titular da *Put* pagou um prêmio para entrar neste derivativo, ou seja, se o preço do ativo-objeto se fixar acima do preço de exercício (*Strike*) a única receita vai ser o pagamento do prêmio por parte do comprador e recebimento do mesmo por parte do vendedor.

Quando o ativo-objeto se fixar abaixo do *Strike* o comprador começa a ganhar dinheiro, mas só terá receita positiva quando este ganho superar o prêmio que foi pago. Este ponto pode ser chamado de *break even point*.

2.2.2 Barreira

Uma opção com barreira é uma opção exótica que tem seu resultado dependente de o ativo-objeto ser negociado acima ou abaixo (dependendo do tipo de barreira) de uma determinada barreira.

Existem, basicamente, quatro tipos de barreira, e todas elas podem ser aplicadas para *Calls* e *Puts*, sendo elas:

- ***Up and In*** – Se o ativo for negociado ACIMA da barreira a opção PODERÁ ser exercida na maturidade.
- ***Up and Out*** – Se o ativo for negociado ACIMA da barreira a opção NÃO PODERÁ ser exercida na maturidade.
- ***Down and In*** – Se o ativo for negociado ABAIXO da barreira a opção PODERÁ ser exercida na maturidade.
- ***Down and Out*** – Se o ativo for negociado ABAIXO da barreira a opção NÃO PODERÁ ser exercida na maturidade.

Para simplificar nosso estudo, serão representados graficamente somente o *payoff* de dois tipos de barreiras, uma *Call Up and Out* e uma *Put Down and In*. Esses são os tipos mais comuns de opções com barreira encontradas no mercado.

Call Up and Out:

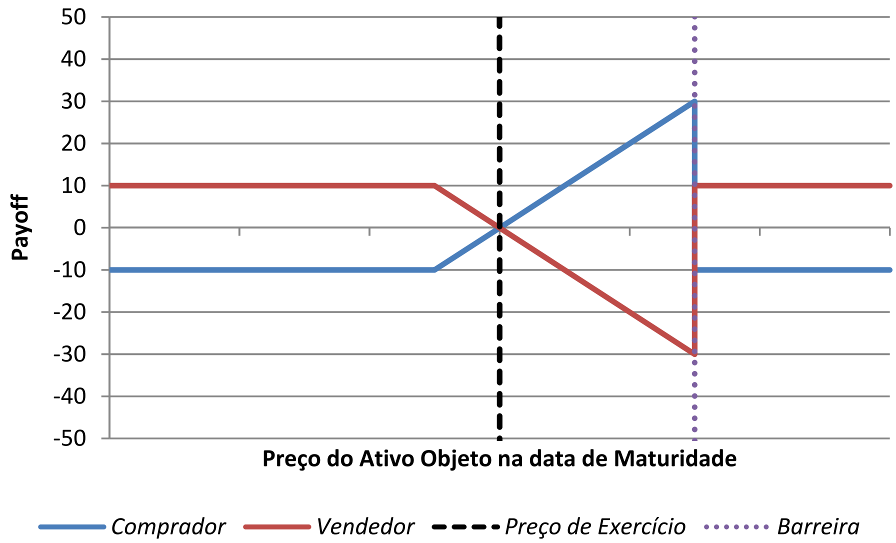

Fig2.3 *Payoff* de uma *Call Up and Out*

Fonte: Elaborado pelo Autor

Neste gráfico, percebe-se que o *payoff* de uma *Call Up and Out* é extremamente parecido com o de uma *Call Plain Vanilla*, com apenas uma diferença: se o ativo for negociado acima da barreira, a opção não pode ser exercida; ou seja, o *payoff* torna-se simplesmente o pagamento do prêmio por parte do titular, e o recebimento do prêmio por parte do emissor.

É importante frisar que a observação da barreira é feita durante toda a duração do contrato de opção, fato que não pode ser representado neste gráfico.

Put Down and In:

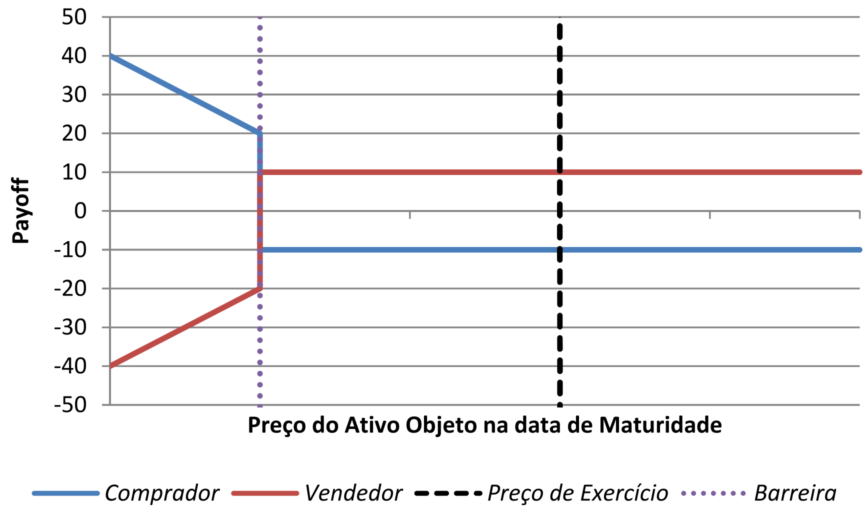

Fig2.4 *Payoff* de uma *Put Down and In*

Fonte: Elaborado pelo Autor

Neste gráfico, percebe-se que o *payoff* de uma *Put Down and In* é simplesmente o pagamento do prêmio por parte do titular, e o recebimento do prêmio por parte do emissor, com apenas uma diferença, se o ativo for negociado abaixo da barreira a opção pode ser exercida, ou seja, o *payoff* se torna o mesmo de uma *Put Plain Vanilla*.

É importante frisar que a observação da barreira é feita durante toda a duração do contrato de opção, fato que não pode ser representado neste gráfico.

2.3 CONCEITOS RELEVANTES PARA PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Nesta parte do trabalho serão mostrados os principais conceitos que devem ser compreendidos para se precificar uma opção. São eles:

- **As Gregas** – Medidas características de qualquer opção, importantes para o *hedge* de uma carteira com este derivativo. Apesar de serem uma "saída" dos modelos de precificação, os conceitos são relevantes para o entendimento dos modelos.
- **A Volatilidade** – Única medida subjetiva levada em conta na precificação
- **Valor Intrínseco vs. Valor do Tempo** – Componentes do preço de uma opção
- **Movimento Browniano** – Conceito que todos os modelos estudados assumem como movimento esperado de um ativo.
- **Fatores que Afetem o Preço da Opção**

2.3.1 As Gregas

As gregas são importantes instrumentos de administração de risco, pois mostram as exposições marginais que cada um dos fatores de formação do preço traz para o preço das opções (HULL, 2005, p. 373). São elas:

Gregas		
Nome	**Letra**	**Descrição**
Delta	**Δ**	Medida marginal de sensibilidade do preço da opção ao preço do ativo-objeto
Gama	**Γ**	Medida de sensibilidade do delta ao preço do ativo-objeto
Teta	**Θ**	É a taxa de mudança do preço da opção com o tempo
Vega	**υ**	Medida de sensibilidade do preço da opção à volatilidade
Rô	**ρ**	Medida de sensibilidade do preço da opção à taxa de juros

Tab2.4 As Gregas

Fonte: Elaborado pelo Autor

Em uma situação real, não adianta somente se obter o preço da opção, mas deve-se também obter-se o valor de suas gregas, para assim possibilitar a administração do risco do derivativo.

Por questões de simplicidade, o SiPA será capaz de obter estas gregas, porém, a análise dos modelos de precificação não contará com análise da capacidade de cada modelo gerar as gregas.

2.3.2 A Volatilidade

Esse é um dos conceitos mais importantes de opções, pois é a única componente subjetiva dos modelos. De modo que é costume se dizer que, quando alguém está negociando opções, essa pessoa está negociando volatilidade.

Segundo HULL (1999), a volatilidade é a medida de incerteza quanto aos movimentos futuros do preço do ativo-objeto. Conforme a volatilidade aumente, maior a chance de o ativo ter um desempenho muito bom ou muito ruim.

A volatilidade nada mais é do que o desvio padrão do desempenho do ativo, dividido pela raiz quadrada do intervalo de tempo analisado, em anos. Esse desvio padrão é expresso em %, por ser o retorno do ativo; logo, a volatilidade é, usualmente, expressa em %/ anos.

Existem dois tipos de volatilidade, o primeiro é a volatilidade histórica, e o segundo é a volatilidade implícita.

A volatilidade histórica é a medida empírica, utilizando dados históricos, do desvio padrão do desempenho do ativo. Essa medida é muito boa para mensurar a volatilidade, porém não reflete nenhuma expectativa de mercado. Para analisar os dados históricos, segundo HULL (1999), devemos considerar os dias úteis. Portanto se estivéssemos buscando a volatilidade diária, teríamos de dividir o desvio padrão do desempenho diário do ativo por raiz (1/252).

A volatilidade implícita é o que realmente um negociador de opções deve buscar descobrir, ela é a volatilidade que está sendo negociada no momento. Nesse caso, utilizam-se modelos inversos aos aqui estudados, pois enquanto aqui devemos introduzir a volatilidade para obter o preço da opção, em um modelo de volatilidade implícita o investidor introduz o preço da opção que está sendo negociada no mercado e obtém a volatilidade. Infelizmente, não é possível inverter as fórmulas fechadas para entrar com o preço da opção e obter a volatilidade, portanto, usam-se métodos numéricos, como o método de *Newton-Raphson*.

2.3.3 Valor Intrínseco vs. Valor do Tempo

De acordo com WILMOTT (1999), o valor de uma opção consiste na combinação de dois componentes, seu valor intrínseco e seu valor temporal.

O valor intrínseco é medido pela diferença entre o preço de exercício (*Strike*) e o valor do ativo objeto.

Para uma opção de compra (*Call*) ela é representada por valor do ativo menos preço de exercício, sendo esse valor somente positivo; ou seja, se o preço de exercício for maior do que o preço do ativo o valor intrínseco dessa opção é zero.

Para uma opção de venda (*Put*) ela é representada por preço de exercício menos valor do ativo, sendo esse valor somente positivo; ou seja, se o preço de exercício for menor do que o preço do ativo, o valor intrínseco dessa opção é zero.

O valor do tempo é muito mais abstrato do que o valor intrínseco, e é o que os modelos de precificação buscam determinar. Pode ser considerado como o valor da possibilidade de o ativo atingir o *strike* e o comprador da opção ganhar dinheiro.

Abaixo, encontra-se um gráfico que representa a diferença do valor intrínseco e o valor de uma opção.

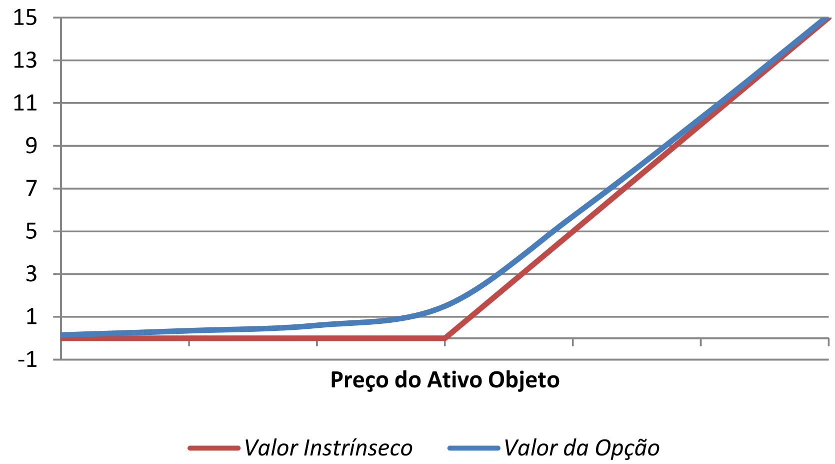

Fig2.5 *Valor de uma Opção*

Fonte: Adaptado de HULL (1999, p.179)

2.3.4 Movimento Browniano

É essencial introduzir um conceito muito importante na teoria das opções neste momento, o conceito do Movimento *Browniano*. Esse conceito é extremamente importante, pois todos os modelos de precificação de opções aqui estudados seguem a premissa de que o ativo objeto irá seguir um Movimento *Browniano* Geométrico.

Segundo HULL (1999), o movimento *browniano* é a versão discreta do modelo de processos de *Ito*. Tal modelo pretende mostrar o comportamento dos preços de um ativo, e pode ser descrito como:

$$\frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dz \qquad \text{(HULL, 1999, p.237)}$$

Na fórmula, s é o preço do ativo; μ a taxa de retorno esperada do ativo (conhecido com *drift*) e σ, a volatilidade do ativo.

Podemos perceber que essa fórmula reflete o seguinte: uma pequena diferença entre o preço de um ativo (*d*s) com uma mudança de tempo *d*t pode ser determinada como o preço atual do ativo (s) vezes o retorno esperado mais (ou menos) um desvio padrão. Neste caso, o retorno esperado é simbolizado por μ e o desvio padrão é simbolizado por σ.

Como já mencionado, o que se utiliza na precificação de opções é a fórmula discreta deste modelo, que é conhecida como movimento *browniano* geométrico. Ela expressa-se como:

$$\frac{\Delta s}{s} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\Delta t$$ (HULL, 1999, p.237)

Considera-se ε uma variável aleatória de distribuição normal, média zero e desvio padrão um.

2.3.5 Fatores que Afetem o Preço da Opção

Por fim, devem ser identificados os fatores que afetam os preços dessas opções e se eles afetam positivamente ou negativamente.

São seis os fatores que afetam o preço das opções, segundo HULL (1999):

1. O preço atual da ação
2. O preço de exercício
3. O prazo até o vencimento
4. A volatilidade da ação
5. A taxa de juros livre de risco
6. Dividendos. (HULL, 1999, p. 170).

Assim sendo, serão discutidas brevemente as influências de cada um desses fatores, conforme discutido em WILMOTT (1999).

A influência do preço da ação e do preço de exercício é bem clara: o *payoff* de uma *call* determina-se por quanto o preço da ação é maior do que o *strike* no vencimento. Portanto, quanto maior o preço da ação e menor o *strike*, mais cara é a *call*. Analogamente, para a *put*, quanto menor o preço da ação e maior o *strike*, mais valiosa será a *put*.

O prazo também é muito intuitivo, quando se trata de opções americanas: imagine duas opções com os mesmos termos, só com os prazos diferentes. O titular daquela de maior prazo tem mais chance de exercer a opção, pois tem um tempo extra em relação à de menor prazo. Para opções européias essa relação não é necessariamente verdadeira, dependendo de outros fatores.

Já a volatilidade pode ser considerada como o nível de incerteza sobre os futuros movimentos do preço da ação. Para o titular tanto das *calls* como das *puts*, existe um potencial limitado de perdas (o preço ou prêmio da opção), como visto nas representações gráficas de *payoff*, mas uma grande possibilidade de ganho. Como as perdas são previstas, quanto maior a volatilidade, maior a chance de o titular ter lucro, portanto em ambos os casos: quanto maior a volatilidade, maior o preço da opção (WILMOTT, 1999).

A taxa de juros livre de risco talvez seja a única explicação destes fatores que não é intuitiva. Se a taxa de juros em uma economia aumenta, a taxa de crescimento esperada de uma ação aumenta. Porém, todos os valores presentes de um fluxo de caixa diminuem. Testando empiricamente e fazendo cálculos que não são pertinentes de demonstrar no contexto deste estudo, tem-se que o primeiro efeito sempre se sobressai ao segundo, fazendo com que o preço das *calls* aumente com o aumento da taxa de juros, enquanto que o das *puts* diminui (HULL, 2005).

Por fim, os dividendos diminuirão o preço da ação no dia de seu pagamento, o que é um mau negócio para os titulares de uma *call* e um bom negócio para os titulares de uma *put* (WILMOTT, 1999). É importante destacar que, para efeito de simplificação, os dividendos não serão considerados nas análises realizadas neste trabalho.

Abaixo, uma tabela resumindo o que acontece com o preço das opções quando ocorre um aumento nos fatores:

Fator	Call Européia	Put Européia	Call Americana	Put Americana
Preço do Ativo	Aumenta	Diminui	Aumenta	Diminui
Preço de Exercício	Diminui	Aumenta	Diminui	Aumenta
Praza até o vencimento	?	?	Aumenta	Aumenta
Volatilidade	Aumenta	Aumenta	Aumenta	Aumenta
Taxa de juros	Aumenta	Diminui	Aumenta	Diminui
Dividendos	Diminui	Aumenta	Diminui	Aumenta

Tab2.5 Efeito da Variação dos fatores no valor de uma opção

Fonte: Adaptado de HULL (2005, p.229)

Sobre os métodos de precificação propriamente ditos, cabíveis e analisados neste trabalho, correspondem a quatro: modelo de *Black and Scholes*, o método da árvore binomial, árvore trinomial e as simulações de Monte Carlo. Os quatro são brevemente explicados a seguir.

2.4 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Nesta parte do trabalho, são introduzidas as teorias sobre precificação de opções. É importante saber que, deste ponto em diante, terá de se levar em consideração três premissas, de acordo com HULL (2005):

1. Não existem custos de transação
2. Todos os lucros são sujeitos à mesma alíquota de imposto
3. É possível emprestar e tomar emprestado dinheiro na taxa de juros livre de risco (HULL, 2005, p. 54)

2.4.1 Black and Scholes

Segundo os próprios criadores do modelo:

Se as opções estão corretamente precificadas, não deveria ser possível fazer lucros criando carteiras de posições compradas e vendidas em opções e as ações sobre as quais elas existem. Usando este princípio, uma fórmula teórica para opções foi derivada. Uma vez que todas as obrigações corporativas podem ser vistas como uma combinação de opções a fórmula também pode ser aplicada. (BLACK; SCHOLES, 1973, p.637)

Esta foi a intenção principal dos autores em seu clássico trabalho de 1973 que revolucionou o mundo dos derivativos: criar um método eficiente capaz de eliminar as imperfeições existentes nas precificações de opções. Em sua fórmula, eles eliminaram quase todas as variáveis subjetivas (com exceção da volatilidade) e instituíram um modelo de precificação racional baseado nos fatores que influenciam os preços, já citados anteriormente neste capítulo. Com isso eliminaram a necessidade de cenários e expectativas. MERTON (1973) tece o seguinte comentário sobre essa modelo: “(...) a característica desta “fórmula” é o número de variáveis de que ela não depende” (MERTON, 1973, p.161). Eis as fórmulas (não vem ao caso demonstrar como se obtêm esses resultados) como derivadas por Black e Scholes (1973):

Considerando a seguinte notação:

S_0: Preço atual da ação

X: Preço de exercício (*strike*) da opção

T: Tempo até o vencimento da opção

r: Taxa de juros livre de risco até o vencimento (ao ano)

c: Valor de uma opção de compra estilo europeu

p: Valor de uma opção de venda estilo europeu

σ: Volatilidade do preço da ação

Para uma opção de compra européia, sobre uma ação que não paga dividendos, tem-se:

$$c = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$ (BLACK; SCHOLES, 1973, p.643)

Analogamente, tem-se a fórmula para uma opção de venda:

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$ (BLACK; SCHOLES, 1973, p.643)

Na qual:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

N(x) é a função de distribuição de probabilidade acumulada para uma variável que é distribuída normalmente, com média zero e desvio padrão um (HULL, 1999, p.264)

Os termos preço da ação, preço de exercício, taxa de juros livre de risco, prazo de vencimento são conhecidos (deve ser lembrado que se está tratando de uma ação que não paga dividendos). O único fator subjetivo da fórmula é a volatilidade.

Mas mesmo indeterminada, a volatilidade é um número relativamente estável ao longo do tempo e, portanto, estimativas razoáveis podem ser feitas, como afirma MERTON (1973).

Como mencionado anteriormente, foge do escopo deste trabalho mostrar como os dois economistas chegaram aos resultados; entretanto, de forma mais simples, podemos analisá-los da seguinte maneira: a função N(d) pode ser considerada a possibilidade desta opção gerar um fluxo de caixa positivo para o titular do derivativo. Podemos entender a fórmula como uma comparação de carteiras; ou seja, uma carteira com uma *Call* deve ter o mesmo valor do que uma quantidade $N(d_1)$ do ativo mais o empréstimo de $N(d_2)$ do valor presente do *Strike*.

Outra observação importantíssima é o fato de que o modelo tem certas premissas para que sempre possa ser verdadeiro. Dessas premissas, vem a maioria de seus problemas, que vão ser discutidos a diante, neste mesmo capítulo. As premissas mais importantes definidas por Black e Scholes (1973) são:

- O preço da ação segue um comportamento lognormal aleatório
- A taxa de juros livre de risco é constante e a mesma para todos os vencimentos
- Não existe distribuição de dividendos durante a vida da opção
- Volatilidade é uma constante conhecida (ou uma função conhecida)
- O *Hedging* da opção é feito de forma contínua
- Não existem custos de transação de nenhuma forma
- A venda a descoberto da ação é permitida e possível
- Não existem possibilidades de arbitragens livres de risco.

(BLACK; SCHOLES, 1973, p.640).

Muitas dessas premissas já foram adaptadas ou “relaxadas” por outras mais próximas da realidade.

O modelo de Black and Scholes (1973) é utilizado, sem sombra de dúvidas, por 90% ou mais dos operadores do mercado de opções no Brasil, dada a sua simplicidade com relação a outros modelos e a fácil padronização de seus termos. É com certeza o mais utilizado ao redor do mundo também. Porém ele tem diversas restrições quanto às características gerais dos mercados, pois foi feito para refletir os mercados mais desenvolvidos (FORTUNA, 2005, p.581).

As principais limitações do modelo, como apresentadas por WILMOTT (1999):

- Black e Scholes assumem que o *hedging* é contínuo.

Quando o modelo fala em *hedging*, ele se refere ao delta *hedging*. Isto é, uma carteira sem risco deve conter a opção de compra, por exemplo, e uma proporção (delta) do ativo objeto. Com isso, a carteira não estaria sujeita a variações no preço do ativo objeto (HULL, 1999, p. 341).

Entretanto, volta-se ao problema do modelo: o delta não é estático e varia conforme o preço da ação (gama). E conseguir fazer o *hedge* contínuo é impossível, fazendo com que a carteira seja livre de risco por apenas intervalos curtos de tempo (WILMOTT, 1999, p.257).

- O modelo assume que não existem custos de transação: para manter o *hedge* perfeito, tem de se comprar ou vender ações ou opções da carteira. Isso envolve um custo.
- Volatilidade é constante ou é função conhecida: essa abordagem não é realista, o mercado é que determina essas volatilidades, e elas variam de acordo com as expectativas.
- A taxa de juros livre de risco é constante e conhecida: não é real, porém existem instrumentos no mercado brasileiro (e no mundo) com os quais é possível "travar" essa taxa de juros. Porém existe certo risco de execução.
- Os preços dos ativos seguem uma curva lognormal: é obvio, observado empiricamente que o caminho dos ativos não segue um padrão pré-estabelecido e contínuo. Esse caminho é incerto e descontínuo.
- As opções estão protegidas (delta *hedged*): às vezes os especuladores preferem tomar posição nas opções, não "travando" os riscos de preço dos ativos. (WILMOTT, 1999, pp. 251-256).

O presente trabalho também envolve o uso de fórmulas fechadas para precificação de opções com barreiras. Apesar da formulação não ter sido criada por Black and Scholes, muito menos levar seu nome, por motivos de simplificação usaremos a nomenclatura "Black and Scholes" para estas fórmulas fechadas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Considerando a seguinte notação:

S: Preço atual da ação

X: Preço de exercício (*strike*) da opção

H: Valor de Barreira

T: Tempo até o vencimento da opção

r: Taxa de juros livre de risco até o vencimento (ao ano)

σ: Volatilidade do preço da ação

Então, de acordo com HAUG (2007, p.153), devemos construir as seguintes variáveis para obter o preço de uma opção com barreira:

$$A = \phi S N(\phi x_1) - \phi X e^{-rT} N\left(\phi x_1 - \phi\sigma\sqrt{T}\right)$$

$$B = \phi S N(\phi x_2) - \phi X e^{-rT} N\left(\phi x_2 - \phi\sigma\sqrt{T}\right)$$

$$C = \phi S \left(\frac{H}{S}\right)^{2(\mu+1)} N(\eta y_1) - \phi X e^{-rT} \left(\frac{S}{H}\right)^{2\mu} N\left(\eta y_1 - \eta\sigma\sqrt{T}\right)$$

$$D = \phi S \left(\frac{H}{S}\right)^{2(\mu+1)} N(\eta y_2) - \phi X e^{-rT} \left(\frac{S}{H}\right)^{2\mu} N\left(\eta y_2 - \eta\sigma\sqrt{T}\right)$$

$$E = -\left(\frac{H}{S}\right)^{2\mu} N\left(\eta y_2 - \eta\sigma\sqrt{T}\right)$$

$$F = \left(\frac{H}{S}\right)^{\mu-\lambda} N\left(\eta z - 2\eta\lambda\sigma\sqrt{T}\right)$$

Nelas:

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \qquad x_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \qquad y_1 = \frac{\ln\left(\frac{H^2}{SX}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \qquad y_2 = \frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$$z = \frac{\ln\left(\frac{H}{S}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T} \qquad \mu = \frac{r - \sigma^2/2}{2} \qquad \lambda = \sqrt{\mu^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

Ainda segundo HAUG (2007), após construir estas variáveis, o preço da opção com barreira dá-se por:

Preço de Opções com Barreira utilizando fórmula fechada							
Tipo	Barreira	Se S > H			Se S < H		
		Preço	η	ϕ	Preço	η	ϕ
Call	Up and In	A+E	-1	1	B-C+D+E	-1	1
	Up and Out	F	-1	1	A-B+C-D+F	-1	1
	Down and In	C+E	1	1	A-B+D+E	1	1
	Down and Out	A-C+F	1	1	B-D+F	1	1
Put	Up and In	A-B+D+E	-1	-1	C+E	-1	-1
	Up and Out	B-D+F	-1	-1	A-C+F	-1	-1
	Down and In	B-C+D+E	1	-1	A+E	1	-1
	Down and Out	A-B+C-D+F	1	-1	F	1	-1

Tab2.6 Preço de Opções com Barreira utilizando fórmula fechada

Fonte: Adaptado de HAUG (2007, p.154)

2.4.2 Modelo Binomial

Desenvolvido em 1979, por Cox, Ross & Rubinstein, três dos mais famosos acadêmicos na área de finanças, mais especificamente na área de derivativos e Real Options (HULL, 1999, p.212).

Trata-se de um método no qual se utilizam dois cenários (daí o nome binomial) para o comportamento do preço de uma ação: um de alta e um de baixa. Para cada um desses cenários mais dois cenários são incluídos, e assim por diante.

Em cada nó da árvore o ativo terá uma razão de subida (u) e uma razão de queda (d), assim como a probabilidade de o ativo subir (p). Segundo Cox, Ross & Rubinstein temos:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta T}}$$ (HULL, 1999, p.225)

$$d = \frac{1}{u}$$ (HULL, 1999, p.225)

$$p = \frac{e^{-r\Delta T} - d}{u - d}$$ (HULL, 1999, p.225)

Considerando a seguinte notação:

u: Razão de subida do ativo

d: Razão de queda do ativo

p: Probabilidade de o ativo subir

r: Taxa de juros livre de risco até o vencimento (nominal)

σ: Volatilidade do preço da ação

ΔT: Tempo entre os nós

Abaixo encontra-se um modelo de árvore binomial com o possível caminho do ativo (S).

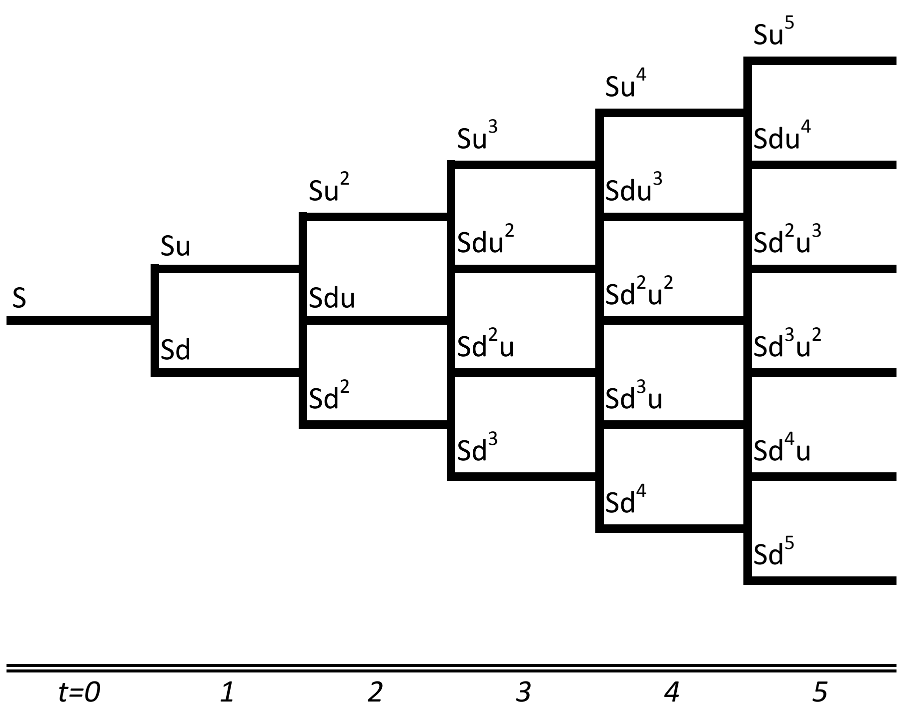

Fig2.6 A árvore Binomial

Fonte: Adaptado de HULL (1999, p.221)

O modelo baseia-se no fato de que após determinado o valor esperado do ativo em cada momento, pode-se calcular o preço da opção, indo-se de trás para frente na árvore. Na maturidade (último nó), o preço da opção pode ser determinado simplesmente em função de seu *payoff*, como demonstrado na seção 2.1.3.

Após determinar os valores das opções para o último nó devemos determinar o valor nos nós anteriores, sendo o valor da opção o obtido no nó 0. Para tal utilizamos:

$$f_{u^x d^y} = e^{-r\sqrt{\Delta T}}\left[p f_{u^{(x+1)} d^y} + (1-p) f_{u^x d^{(y+1)}}\right] \qquad \text{(HULL, 1999, p.220)}$$

Em que f é o preço da opção em cada nó $u^x d^y$. Quando x e y são iguais a 0 temos o preço da opção.

2.4.3 Modelo Trinomial

Esse modelo é praticamente igual ao da árvore binomial, só que prevê três cenários em vez de dois (WILMOTT, 1999, p.247). Segue a ilustração que o representa:

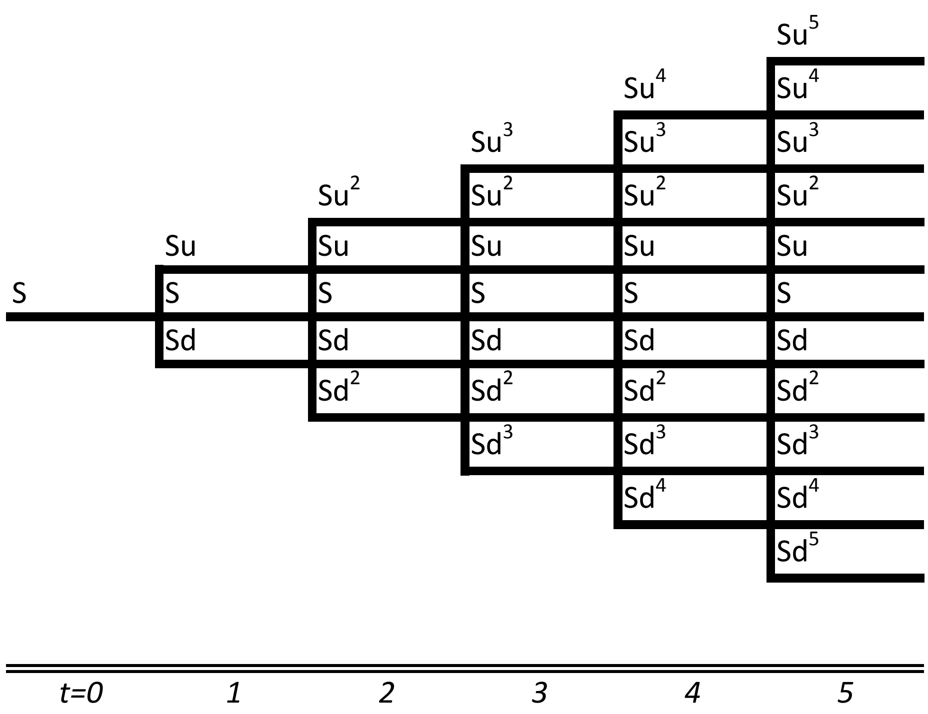

Fig2.7 A árvore Trinomial

Fonte: Adaptado de HULL (1999, p.395)

Para esse modelo utilizam-se as seguintes fórmulas:

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta T}}$$ (HAUG, 2007, p.300)

$$d = \frac{1}{u}$$ (HAUG, 2007, p.300)

$$p_u = \left(\frac{e^{r\Delta T/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta T/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta T/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta T/2}}}\right)^2$$ (HAUG, 2007, p.300)

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta T/2}} - e^{r\Delta T/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta T/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta T/2}}}\right)^2$$ (HAUG, 2007, p.300)

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$ (HAUG, 2007, p.300)

Considerando a seguinte notação:

u: Razão de subida do ativo

d: Razão de queda do ativo

p_u: Probabilidade do ativo subir

p_m: Probabilidade do ativo permanecer estável

p_d: Probabilidade do ativo cair

r: Taxa de juros livre de risco até o vencimento (ao ano)

σ: Volatilidade do preço da ação

ΔT: Tempo entre os nós

2.4.4 Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é a mais precisa e dinâmica de todos os modelos, entretanto é o modelo que mais consome recursos computacionais.

Tem a lógica mais simples de todas, simulam-se, diversas vezes cenários e calcula-se o *payoff* da opção em cada um dos cenários. O preço da opção é a média destes *payoff*. Com isso é possível precificar uma gama enorme de tipos de opções.

Para simular o movimento do ativo em cada passo *i* ao longo do tempo utilizamos o chamado movimento *browniano* geométrico, no qual:

$$S_i = S_{i-1} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta T + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta T}}$$ (HULL, 1999, p.397)

Considera-se a seguinte notação:

S_i: Preço do ativo no instante *i*

r: Taxa de juros livre de risco até o vencimento (ao ano)

σ: Volatilidade do preço da ação

ΔT: Tempo entre os nós

ε: Variável randômica de distribuição normal, média zero e desvio padrão um

É fácil ver a relação da fórmula de Monte Carlo com a fórmula do movimento *browniano* geométrico apresentada na seção 2.3.3, em que a taxa de juros menos a metade do quadrado da volatilidade é o *drift* (valor esperado do ativo) e σ é o desvio padrão da estimativa.

2.5 PROGRAMAÇÃO COMPUTACIONAL

Considerando que uma parte importante deste projeto consiste na montagem de um sistema computacional que permita a agregação dos diferentes modelos de precificação existentes, faz-se necessária uma abordagem sobre alguns tópicos relacionados ao tema, como programação, linguagem VBA e interface.

A programação nada mais é do que o processo de escrita, teste e manutenção de um programa de computador. O programa é escrito em uma linguagem de programação, embora seja possível, com alguma dificuldade, escrevê-lo diretamente em código de máquina, ou seja, diretamente no formato em que o computador entende e executa as instruções (REED, 2000).

De acordo com ALVES (1978) cinco etapas devem ser seguidas para a criação de um programa de computador:

1. Reconhecer a necessidade de um programa para resolver um problema
2. Planificar o programa e selecionar as ferramentas necessárias para resolver o problema
3. Escrever o programa na linguagem de programação escolhida
4. Compilação: tradução do código fonte legível pelo homem em código executável pela máquina, o que é feito por meio de compiladores e outras ferramentas.
5. Testar o programa para ter a certeza de que funciona; se não, regressar ao passo 3.

Assim, definidos o problema (precificação de opções) e as ferramentas necessárias (compilação dos modelos em um sistema único), deve-se definir qual a linguagem de programação a ser utilizada.

Uma linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador. É um conjunto de regras sintáticas e semânticas usadas para definir um programa de computador. Uma linguagem permite que um programador especifique precisamente sobre quais dados um computador vai atuar, como estes dados serão armazenados ou transmitidos e quais ações devem ser tomadas sob várias circunstâncias (ALVES, 1978).

As linguagens de programação têm a função principal de permitir que programadores tenham uma produtividade maior, permitindo expressar suas intenções mais facilmente do que se fosse usada a linguagem que um computador entende nativamente (código de máquina). Existem dezenas de linguagens de programação diferentes, cada qual com sua particularidade, mas a maioria delas é capaz de criar qualquer programa (ALVES, 1978).

É também por meio desta linguagem de programação que são criadas as interfaces dos programas. Interface no sentido estrito da palavra é a forma como duas entidades se comunicam; no caso deste projeto, a linguagem de programação será responsável por determinar a interface gráfica do usuário (também conhecido como GUI, do inglês *Graphical User Interface*) que é um mecanismo de interação homem-computador com um mouse ou teclado em que o usuário é capaz de selecionar esses símbolos e manipulá-los de forma a obter algum resultado prático (REED, 2000). Um exemplo disso são os sistemas operacionais como Windows, Macintosh e Linux.

O objetivo em um projeto desses é que a interface seja simples e completa ao mesmo tempo, de forma a ser fácil de manipular sem deixar de prover todas as informações necessárias.

Dentre as linguagens existentes, será usada neste projeto a linguagem *Visual Basic for Applications* (VBA). Esta é uma implementação do *Visual Basic* (uma linguagem de programação produzida pela Microsoft) incorporada em todos os programas do Microsoft Office, bem como em outras aplicações da Microsoft e que foi também incorporada pelo menos parcialmente em outros programas de terceiros como o AutoCAD, Mathcad e WordPerfect (REED, 2000).

Ele "substitui e amplia as capacidades anteriormente existentes das linguagens de macros específicas para as aplicações e pode ser usado para controlar a quase totalidade dos aspectos da aplicação anfitriã" (REED, 2000, p. 17). Permite ainda a manipulação de aspectos da interface do usuário tais como menus e barra das ferramentas e o trabalho com formulários desenhados pelo usuário ou com caixas de diálogo.

A linguagem VBA é rica em funcionalidade e extremamente flexível, tornando-se, desta maneira, a que melhor se encaixa neste projeto, também pelo fato de ter sido criada para funcionar com os programas do Microsoft Office, que são os programas padrão utilizados em todo o BNP Paribas.

2.6 ESTATÍSTICA

Para realizar a comparação dos preços obtidos de cada modelo será realizado um teste estatístico, que tem como objetivo verificar se existe alguma diferença significativa entre as médias de erros absolutos entre o preço de cada modelo e o preço de uma variável controle.

2.6.1 Teste de Variância

O primeiro passo para aplicação de uma análise de variância é a aplicação de um teste de variância, pois é necessário que as variâncias de cada amostra sejam iguais.

Este teste é conhecido como teste de Cochran, o qual é de fácil aplicação, e só pode ser utilizado quando temos os mesmos graus de liberdade entre as amostras. O teste visa comparar as duas hipóteses:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = ... = \sigma_k^2$

H_1: Pelo menos uma das variâncias é significativamente diferente

(COSTA NETO, 2002, p.121)

Para realizar o teste, basta construir a seguinte variável:

$$g = \frac{\max(s_i^2)}{\sum_{i=1}^{k} s_i^2} \qquad i = 1,2,...,k \qquad \text{(COSTA NETO, 2002, p.121)}$$

Considerando α o nível de significância, n é o número de experimentos com cada modelo e k é o número de modelos. Esta variável deve então ser comparada com os resultados fornecidos por uma tabela de valores críticos para o Teste de Cochran, em função de α, n e k (Em anexo no COSTA NETO, 2002). Se a variável g for maior do que a da tabela então rejeita-se H_0, caso contrário podemos considerar que as variâncias de todos os processos são significativamente iguais.

2.6.2 Análise de Variância

De acordo com COSTA NETO (2002), uma análise de variância tem como objetivo determinar se existe alguma diferença estatisticamente significante entre médias, ou seja, estamos comparando as seguintes hipóteses:

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_k$

H_1: Pelo menos uma das médias é significativamente diferente

Segundo COSTA NETO (2002, p.150), devemos considerar:

x_{ij} = j ésimo valor da i ésima amostra de n elementos

$T_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ = soma dos valores da i ésima amostra

$Q_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2$ = soma dos quadrados da i ésima amostra

$T = \sum_{i=1}^{k} T_i$ = soma toal dos valores

$Q = \sum_{i=1}^{k} Q_i$ = soma total dos quadrados

$\bar{x}_i = T_i/n$ = média da i ésima amostra

$\bar{\bar{x}}_i = T/nk$ = média de todos os valores

Ainda segundo o mesmo autor, o próximo passo é montar o seguinte quadro:

Disposição Prática para a Análise de Variância					
Fonte da Variação	**Soma de Quadrados**	**Graus de Liberdade**	**Quadrado Médio**	**F**	**F_α**
Entre Amostras	$SQE = \Sigma^{k}_{j=1} T_i^2/n - T^2/nk$	k-1	$S^2_E = SQE/(k-1)$	S^2_E / S^2_R	$F_{k-1,k(n-1),\alpha}$
Residual	$SQR = Q - \Sigma^{k}_{j=1} T_i^2/n$	k(n-1)	$S^2_R = SQR/[k(n-1)]$		
Total	$SQT = Q - T^2/nk$	nk-1			

Tab2.7 ANOVA

Fonte: Adaptado de COSTA NETO (2002, p.154)

Se tivermos $F > F_\alpha$ a hipótese H_0 será rejeitada, mostrando diferenças estatisticamente significativas entre as amostras.

É finalizado, então, este capítulo, em que foram apresentados todos os conceitos que precisarão ser aplicados para o desenvolvimento deste projeto, englobando tanto aspectos teóricos (conceitos de derivativos e estatística), quanto aspectos operacionais (programação).

METODOLOGIA DE TRABALHO

O trabalho será realizado por meio de uma análise empírica dos modelos de precificação mostrados no segundo capítulo. Esta precificação será realizada de forma teórica e não contará com nenhuma comparação com casos reais.

O trabalho for feito durante o ano de 2008, e foi realizado seguindo as etapas mostradas na figura a seguir:

Etapas para Realizaçao do Projeto				
Entendimento do Mercado de Derivativos	**Entendimento dos Modelos de Precificação de Opção**	**Desenvolvimento do *Software* SiPA**	**Análise dos Modelos de Precificaçao**	**Conclusão**

Tab3.1 Etapas do Projeto

Fonte: Elaborado pelo Autor

A primeira etapa, de entendimento do mercado de derivativo, foi realizada durante muito tempo. Quando o aluno entrou no estágio, em setembro de 2007, tinha apenas uma pequena noção do assunto. É bem verdade que os conceitos de derivativos são tão amplos e, às vezes, tão complexos, que nem uma vida inteira de estudos seria suficiente para saber tudo sobre o assunto, porém, após muita leitura, pesquisas e ajuda de colegas de trabalho chegou-se a um nível de conhecimento satisfatório para a realização deste projeto.

Logo após o entendimento global de derivativos seguiu-se para a parte de precificação de opções. Então, os seguintes modelos foram escolhidos para a análise:

- Black and Scholes
- Árvore Binomial
- Árvore Trinomial
- Simulação de Monte Carlo

É muito importante lembrar que o primeiro se refere não só à formulação de *Black and Scholes*, mas sim a uma generalização para todas as formulas fechadas usadas para se obter o preço de opções (todas derivadas do modelo de *Black and Scholes*). Os outros três modelos são numéricos.

Essas primeiras duas etapas do trabalho fazem parte da revisão bibliográfica e encontram-se no segundo capítulo deste livro.

Logicamente seria impossível analisar os modelos sem ter um método para obter seus resultados, por isso um *software* foi criado.

Abaixo se encontra uma foto ilustrativa do *software*, batizado de SiPA (Sistema de Precificações Avançadas).

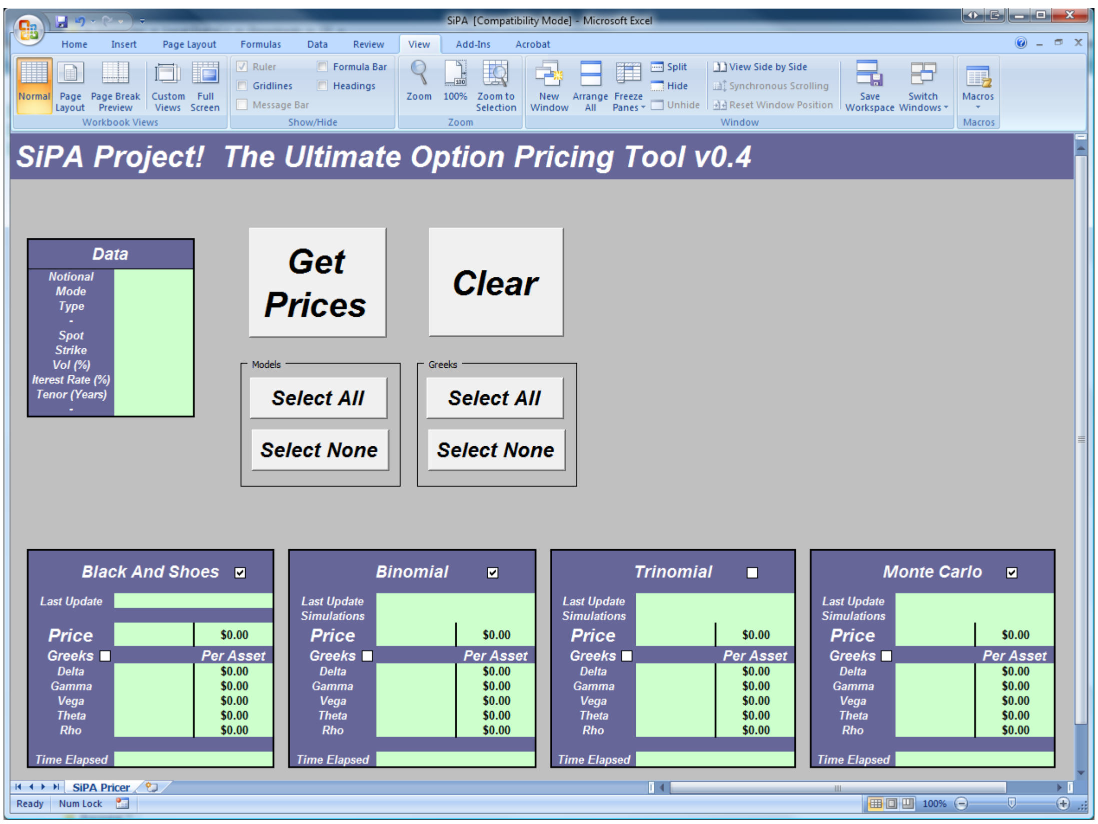

Fig3.1 SiPA

Fonte: Elaborado pelo Autor

Obviamente o desenvolvimento do *software* não é o objetivo principal deste trabalho, visto que, se fosse necessário, seria possível contratar um programador profissional para realizar esta tarefa. Foi decidido que o aluno construiria este *software* após levar-se em conta que haveria um enorme ganho teórico ao construir o SiPA, não só na área de modelos de precificação, mas também na de programação em si. Todo o processo de desenvolvimento do *software* encontra-se no capítulo quatro, assim como há referências bibliográficas sobre programação no capítulo dois.

Com o sistema pronto, partiu-se para a análise de cada modelo. Em um primeiro momento, mostra-se uma visão geral do assunto. Após isso, cada modelo foi calibrado, ou seja, buscou-se determinar qual o melhor número de simulações para que o resultado seja estável nos modelos numéricos.

Então, é realizada uma comparação quantitativa dos modelos. Um dos critérios quantitativos será a precisão destes, que será validada por meio de um teste estatístico (análise de variância).

Devido ao fato de que um objetivo do trabalho é determinar se existem, hoje em dia, recursos computacionais suficientes para justificar o uso de modelos numéricos para precificar todos os tipos de opções, esta comparação será feita utilizando um computador de ultima geração, equipado com um processador Intel Core 2Extreme Q6800 de 2.93GHz e 4GB de memória RAM.

A etapa final da análise conta com a criação de um índice de desempenho de cada modelo. Este índice tem como função determinar qual é o melhor modelo dentre os escolhidos e considera critérios não só quantitativos, mas também qualitativos.

Por fim, o trabalho é encerrado com as conclusões obtidas após sua realização, tema que é abordado no sexto capítulo. Este capítulo procura responder à grande questão deste trabalho: com os recursos computacionais existentes hoje em dia, é possível abandonar a busca por fórmulas fechadas para se precificar opções, ou devemos manter modelos numéricos somente para casos extremos?

DESENVOLVIMENTO DO SIPA

Nesta parte do trabalho serão descritas as etapas que levaram ao desenvolvimento do *software* que facilitou a realização deste projeto.

O SiPA apresenta importantes conceitos adquiridos durante as etapas de estudo. A idéia não é utilizá-lo somente para auxiliar nas discussões sobre os modelos de precificação, mas também distribuí-lo para todos que tiverem interesses teóricos, como pessoas querendo fazer algum outro tipo de análise sobre opções; e práticos, como pessoas buscando negociar este tipo de derivativo.

Portanto, ao final do trabalho, irá se encontrar a versão final do SiPA, para que possa ser distribuído livremente, com um código fonte aberto.

SiPA Project! The Ultimate Option Pricing Tool

4.1 PRIMEIRAS IDÉIAS

A idéia de desenvolver o SiPA (e, por conseqüência, do trabalho como um todo) veio de uma tarefa proposta no BNP Paribas: o desenvolvimento de uma planilha para simular cenários de determinados ativos.

No primeiro semestre de 2008, tal planilha foi construída. A simulação utiliza fatores que foram muito úteis para o desenvolvimento do SiPA, como:

- Utilização do Microsoft Excel
- Programação em VBA
- Simulação de Monte Carlo
- Movimento Browniano

Abaixo se encontram figuras demonstrando o simulador de cenários. Obviamente muitas funções e instrumentos foram adicionados a este simulador, porém ele pode ser considerado um primeiro e importante passo para construção do SiPA.

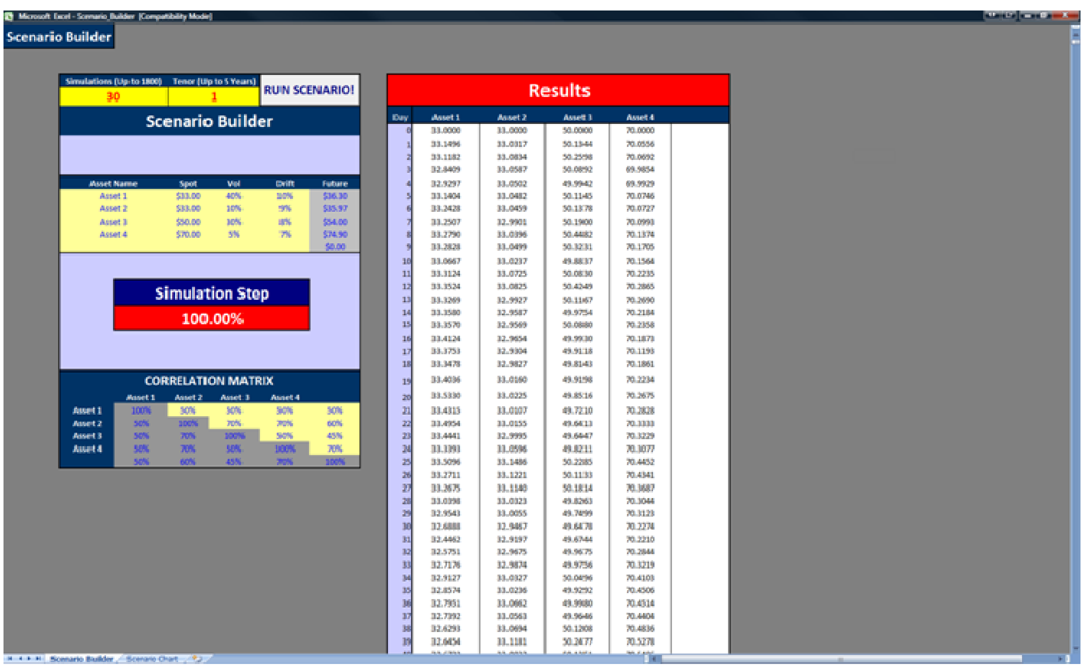

Fig4.1 Menu Principal do construtor de cenários

Fonte: Elaborado pelo Autor

Ele funciona da seguinte maneira:

- O usuário entra com dados da simulação, como: nome do ativo; preço que está sendo negociado; volatilidade; taxa de juros; período em que será feita a simulação; correlação entre os ativos; quantidade de simulações.
- O usuário então roda o programa clicando no botão “RUN SCENARIO!”. A seguir, a macro programada entra e faz os cálculos de como cada ativo vai variar no tempo.
- Por fim, o usuário tem as opções de analisar o cenário tanto na tabela de resultado, que fica ao lado do menu principal do programa, quanto em um gráfico, que é gerado automaticamente e é exibido na aba subseqüente.

A primeira idéia para o SiPA foi de desenvolver um *software* com a capacidade de precificar diversos tipos de opções, incluindo várias exóticas e algumas estratégias que utilizam este derivativo.

Porém ficou claro que isto não seria interessante para um trabalho de formatura, então houve uma mudança de abordagem. O SiPA foi transformado em um sistema para auxiliar uma análise dos métodos de precificação mais utilizados, para opções *plain vanilla* e com barreira.

4.2 ATIVIDADES DO PROCESSO

Nesta parte do capítulo quatro será descrito o processo que levou à criação do SiPA.

4.2.1 Análise de Requisitos

O software deve ter as seguintes especificações:

- Interface amigável
- Ser em inglês (apesar de o trabalho ser em português, o *software* vai ser utilizado para outros propósitos no futuro, sendo mais adequado estar escrito em inglês)
- Precificar opções Européias *Plain Vanilla*
- Precificar opções Européias com Barreiras
- Prover preços utilizando todos os modelos analisados, para opções *plain vanilla* e com Barreiras
- Botões facilitadores de seleções
- Ser compatível com o Excel utilizado no BNP Paribas

4.2.2 Arquitetura

O SiPA foi desenvolvido utilizando codificação em VBA, em uma planilha de Microsoft Excel.

4.2.3 Testes

Depois de cada nova função ser implementada, o software é testado, não só com o propósito de encontrar falhas ou imperfeições na precificação dos derivativos, mas também com a função de encontrar erros em todas as rotinas que ele realiza.

Há uma grande importância nestes testes, pois uma falha em algum dos modelos pode prejudicar não só o resultado do trabalho, mas também pode trazer prejuízos financeiros, visto que o objetivo posterior ao trabalho é distribuir o SiPA para pessoas que queiram começar a negociar estes derivativos.

Os testes do SiPA foram realizados comparando os resultados precificados com o resultado do *software* fornecido por HAUG (2007). Para o caso das *Plain Vanilla,* a opção precificada foi a seguinte:

- *Call* e *Put*
- *Spot* $100
- *Strike* $120
- Volatilidade de 30%
- Taxa de Juros de 8%
- Tempo para o vencimento de seis meses

No caso das opções com barreira usaremos:

- *Call up and out* e *Put Down and In*
- *Spot* $100
- *Strike* $100
- Volatilidade de 30%
- Taxa de Juros de 10%
- Tempo para o vencimento de seis meses
- Barreira $120 (*Up*) e $80 (*Down*)

Os resultados dos testes se encontram a seguir:

Testes de validação do SiPA							
Modelo	**Opção**	***Plain Vanilla***			**Barreira**		
		SiPA	**Haug**	**Erro (SiPA-Haug)**	**SiPA**	**Haug**	**Erro (SiPA-Haug)**
Black & Shoes	***Call***	$3.4071	$3.4071	**$0.0000**	$1.0278	$1.0278	**$0.0000**
	Put	$18.7019	$18.7019	**$0.0000**	$4.5390	$4.5390	**$0.0000**
Árvore Binomial (3000 Simulações)	***Call***	$3.4075	$3.4075	**$0.0000**	$1.0276	$1.0276	**$0.0000**
	Put	$18.7022	$18.7022	**$0.0000**	-	Não Disponível	**-**
Árvore Trinomial (3000 Simulações)	***Call***	$3.4072	$3.4072	**$0.0000**	$1.0275	$1.0275	**$0.0000**
	Put	$18.7019	$18.7019	**$0.0000**	-	Não Disponível	**-**
Monte Carlo (500,000 simulações)	***Call***	$3.4095	$3.4019	**$0.0076**	$1.0270	$1.0278	**$0.0008**
	Put	$18.7024	$18.7120	**$0.0096**	$4.5430	$4.5503	**$0.0073**

Tab4.1 Testes de Validação do SiPA

Fonte: Elaborado pelo Autor

Como se pode notar, o modelo deve ser validado, pois o único modelo que apresentou divergências em relação ao *software* de HAUG (2007) foi o Monte Carlo, porém por se tratar de um modelo que depende de variáveis aleatórias, apresentou uma margem de erro aceitável (menos de $0.01). É importante notar que não existe a precificação de Barreiras *Down* no *software* de HAUG (2007) para o método das árvores, porém a precisão perfeita com as barreiras *In* justificam a validação do modelo.

4.2.4 Documentação

Abaixo se encontra um histórico das versões do SiPA:

V1.0 (29/Outubro/2008)

- Codificação das gregas nos modelos restantes (todos exceto *Black and Scholes* para *Plain Vanilla*)

V0.9 (27/Outubro/2008)

- Codificação do modelo Binomial e trinomial para Barreiras
- Correção de *bugs* no modelo de *Black and Scholes* para Barreiras

V0.8 (22/Outubro/2008)

- Inclusão dos botões de seleção de tipos de opção (*Call* e *Put*)
- Inclusão dos botões de seleção de tipos de opção (*Plain Vanilla* e Barreira)
- Codificação do modelo de Monte Carlo para opções com Barreira

V0.7 (20/Outubro/2008)

- Utilização de somente uma célula para escolher entre preços por ação e preço total
- Correção de *bugs* no modelo de Monte Carlo

V0.6 (11/Outubro/2008)

- Correção de *bugs* no modelo Trinomial
- Correção de *bugs* no modelo de *Black and Scholes* para Barreiras

V0.5 (05/Outubro/2008)

- Codificação da fórmula fechada para Barreiras
- Correção de *bugs* no modelo de Trinomial

V0.4 (21/Setembro/2008)

- Codificação do modelo Trinomial para opções *Plain Vanilla*
- Correção de *bugs* no modelo de Monte Carlo
- Inclusão dos botões de seleção de gregas

V0.3 (17/Setembro/2008)

- Inclusão das Gregas
- Codificação das gregas no modelo de *Black and Scholes* para opções *Plain Vanilla*
- Codificação do modelo Binomial para opções *Plain Vanilla*
- Codificação do modelo de Monte Carlo para opções *Plain Vanilla*

V0.2 (10/Setembro/2008)

- Inclusão do botão "Get Prices"
- Inclusão dos botões de seleção de modelos
- Inclusão do botão "Clear"
- Codificação do modelo de *Black and Scholes* para opções *Plain Vanilla*

V0.1 (08/Setembro/2008)

- Nascimento do Sistema
- Inclusão do campo "Data"
- Inclusão do campo "Black and Scholes"
- Inclusão do campo "Binomial"
- Inclusão do campo "Trinomial"
- Inclusão do campo "Monte Carlo"

4.3 RESULTADOS

O esforço gasto com a decisão de construir um *software* ao invés de utilizar um pronto trouxe várias dificuldades para o trabalho. Porém, chegou-se a um excelente resultado, que permitiu um conhecimento muito maior para realizar a análise entre os modelos.

O SiPA está dividido, basicamente, em três partes: as Entradas, os Comandos e as Saídas. Abaixo estão apresentadas em mais detalhes cada uma das partes.

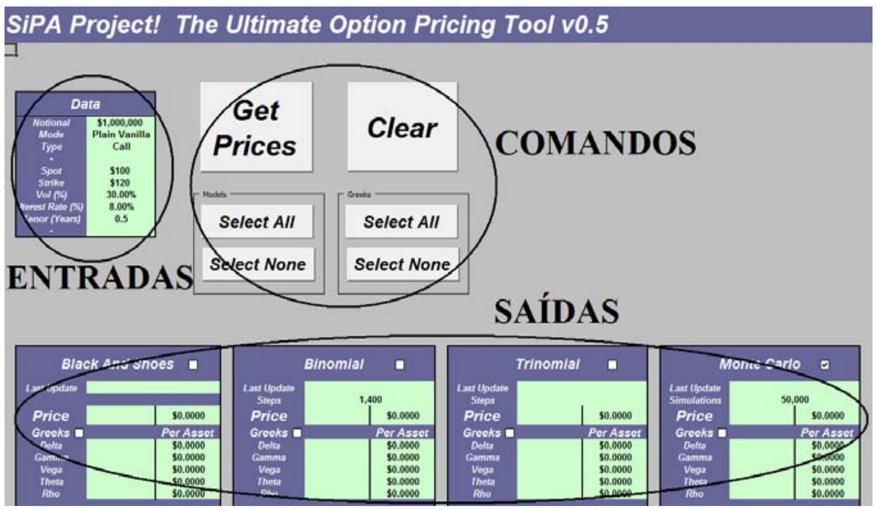

Fig4.2 Ilustração das partes do SiPA

Fonte: Elaborado pelo Autor

4.3.1 Entradas

A área das entradas é onde basicamente o usuário entra com as características da opção que deseja precificar:

- *Notional* – Volume total, em $ (Campo Opcional)
- *Mode* – Tipo da opção, *Plain Vanilla* ou Barreira
- *Barrier Type* – Tipo de Barreira
- *Spot* – Valor à vista do ativo, em $
- *Strike* – Preço de exercício, em $
- *Vol* – Volatilidade, em %
- *Interrest Rate* – Taxa de juros ao ano, em %

Data	
Notional	$1,000,000
Mode	Barrier
Type	Call
Barrier Type	Up and Out
Spot	$100
Strike	$120
Vol (%)	30.00%
Iterest Rate (%)	8.00%
Tenor (Years)	0.5
Barrier	$140

Fig4.3 Entradas do SiPA

Fonte: Elaborado pelo Autor

- *Tenor* – Tempo até o vencimento, em anos
- *Barrier* – Valor da Barreira, em $

4.3.2 Comandos

A área dos comandos serve para o usuário dar instruções para o *software*. Ela possui botões com diferentes funcionalidades:

- *Get Pirces* – Comando para obtenção dos preços
- *Clear* – Limpa todos os campos
- *Select All Models* – Seleciona todos os modelos
- *Select None Models* – Não seleciona qualquer modelo
- *Select All Greeks* – Precifica todas as gregas
- *Select None Greeks* – Não precifica qualquer grega

Fig4.4 Comandos do SiPA

Fonte: Elaborado pelo Autor

4.3.3 **Saídas**

A área mais importante do *software*, onde se obtém o preço da opção:

- *Last Update* – Momento em que houve o último *update* no preço
- *Simulations* – Número de simulações
- *Price* – Preço, em % na esquerda e em $ na direita (podendo ser Por Ação ou Total)
- *Greeks* – Gregas em % na esquerda e em $ na direita (podendo ser Por Ação ou Total)
- *Time Elapsed* – Tempo gasto para obtenção do preço com o modelo

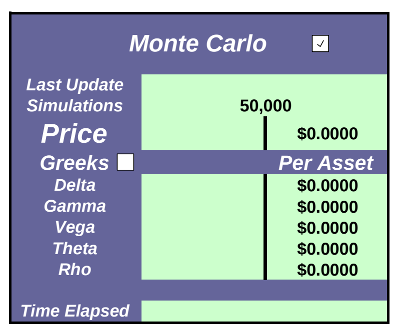

Fig4.5 Saídas do SiPA

Fonte: Elaborado pelo Autor

ANÁLISE DOS MODELOS

Esta pode ser considerada a principal parte do trabalho. Todo o esforço feito até agora teve como objetivo preencher a análise dos modelos, pois por meio dela será realizada a conclusão e o fechamento do trabalho. Em suma, é aqui que deve ser resolvido o problema descrito na seção 1.2.

Primeiramente é feita uma análise da situação geral dos modelos, discutindo globalmente quais são os pontos fortes e fracos de cada um.

Após isso, necessita-se fazer uma calibração dos modelos numéricos, ou seja, descobrir qual número de simulações cada um deve fazer para atingir um certo nível de precisão, sem muitos prejuízos no tempo de processamento.

O próximo passo é escolher características de opções para precificar, e assim gerar resultados para uma comparação. As entradas dos modelos são variadas de forma a comparar uma ampla gama de situações. Para as opções *Plain Vanilla* teremos:

- *Call e Put*
- *Spot* $100
- *Strike* de $80, $100 e $120
- Volatilidade de 10% e 40%
- Taxa de Juros de 5% e 14%
- Tempo para o vencimento de três meses e um ano

Com isso, concluímos que devem ser feitas 48 comparações empíricas com as *Plain Vanilla*.

Para o caso das Barreiras, as seguintes entradas serão variadas:

- Todos os tipos de Barreira (*Call Up and Out, Call Down and Out, Call Up and In, Call Down and In, Put Up and Out, Put Down and Out, Put Up and In* e *Put Down and In*)
- *Spot* $100
- *Strike* de $100

- Volatilidade de 10% e 40%
- Taxa de Juros de 10%
- Tempo para o vencimento de três meses e um ano
- Barreira sempre de $80 (no caso de *down*) ou $120 (no caso de *up*)

A partir desses dados, concluímos que devem ser feitas 32 comparações empíricas com as Barreiras, totalizando 80 comparações ao total. Esses cenários estão sendo propostos pois testarão uma grande gama das condições de mercado: *Strike* dentro, fora ou no dinheiro; volatilidade alta e baixa; taxa de juros alta e baixa e tempo para o vencimento curto e longo. Uma lista com todas as opções a serem precificas encontram-se no Anexo A.

O resultado das precificações (Anexo B) será apresentado de forma condensada a seguir, que será, basicamente, a média da precisão, do tempo de processamento e o desvio padrão dos dados. O tempo de processamento será mensurado pelo próprio SiPA. Já a precisão será o erro absoluto entre o preço gerado por cada modelo e o preço gerado por uma variável de controle. Esta variável de controle será obtida através de um Monte Carlo com muitas simulações (número a ser determinado na seção 5.2.1), resultado altamente preciso, porém que inviabiliza o processo de trading desde derivativo devido ao tempo elevado necessário para precificação. O Monte Carlo é considerado o resultado mais preciso pois é um modelo que não usa nenhum "artifício" para analisar o movimento browniano de um ativo, simplesmente o faz diversas vezes.

Também será realizado um teste estatístico de análise de variância com os resultados. Caso algum dos modelos tenha diferença estatisticamente significante dos outros ele obterá nota 0 no critério de precisão.

Depois de concluídas todas as comparações numéricas será apresentado o Índice SiPA. Este índice tem como objetivo classificar, por meio de critérios qualitativos e quantitativos, os modelos estudados. Este índice será apresentado da seguinte forma:

$$\mathrm{I_{SiPA}} = \qquad \mathrm{I_{SiPA\ Vanilla}} \qquad + \qquad \mathrm{I_{SiPA\ Barreira}}$$

$$\mathrm{I_{SiPA}} = (\mathrm{X_{1V}C_{1V} + X_{2V}C_{2V}} + \cdots + \mathrm{X_{nV}C_{nV}}) + (\mathrm{X_{1B}C_{1B} + X_{2V}C_{2B}} + \cdots + \mathrm{X_{nB}C_{nB}})$$

Considerando a seguinte notação:

X_{nV}: Peso do Critério n das *Vanillas*

C_{nV}: Nota obtida no Critério n das *Vanillas*

X_{nB}: Peso do Critério n das Barreiras

C_{nB}: Nota obtida no Critério n das Barreiras

Os critérios terão nota de 1 a 10 e os pesos serão de 1 a 4. Para os critérios quantitativos (Tempo, Precisão e Constância) serão considerados a média, o desvio padrão e os tempos de processamento obtidos na análise.

O primeiro passo para construção e cálculo deste índice é a determinar quais serão os critérios considerados. Posteriormente deve-se atribuir pesos a cada critério. Em seguida, é realizada uma discussão para determinar as notas que cada modelo terá em cada critério, tanto para as *Vanillas* quanto para as Barreiras.

Por fim, será descoberto o modelo que obteve melhor resultados nos testes, sendo ele, logicamente, o que obteve a maior nota no índice SiPA.

5.1 VISÃO GERAL

Como já descrito no capítulo dois, os modelos seguem algumas premissas, que podem ser consideradas somente teóricas, pois na prática as condições são muito mais complexas. Como o intuito é de apenas comparar os quatro modelos (todos assumem as mesmas condições), as simplificações são perfeitamente plausíveis.

A grande diferença entre os modelos é que quanto mais capacidades eles trazem (maior flexibilidade, maior capacidade de customização, etc...) mais tempo de processamento eles demandam. Abaixo se encontra uma ilustração para mostrar este cenário.

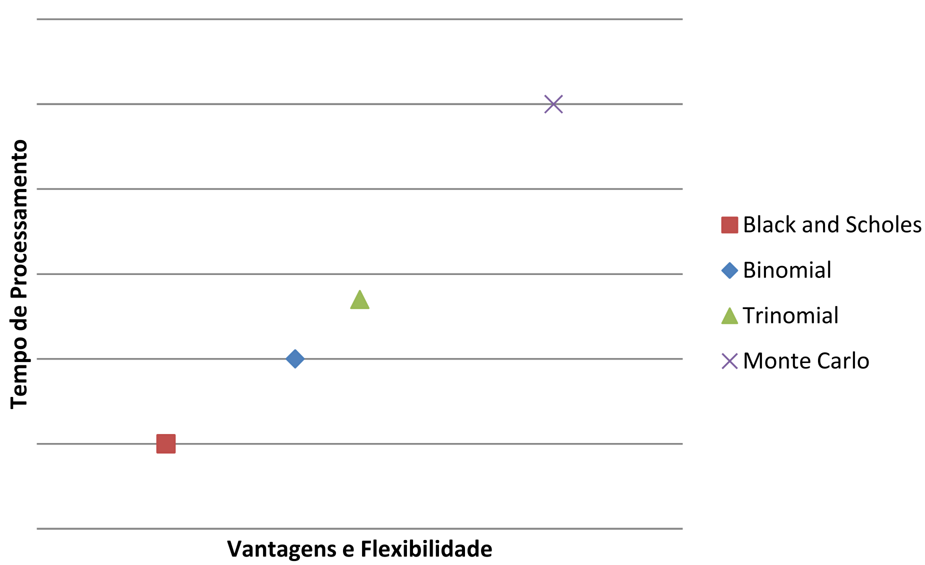

Fig5.1 Comparação preliminar entre os modelos
Fonte: Elaborado pelo Autor

Obviamente este gráfico está fora de escala, tendo como único propósito orientar o leitor a respeito de como é a relação entre os modelos.

Agora serão descritas as principais vantagens e desvantagens de cada modelo, além de um pouco da história de cada um.

5.1.1 Black and Scholes

O modelo foi criado por Fischer Black e Myron Scholes, dois economistas que em maio de 1973, publicaram um trabalho chamado "*The Pricing of Options & Corporate Liabilities*" no *Jornal of Political Economy*. Este trabalho foi revolucionário, e é usado até hoje, inclusive neste projeto, como referência. Muitos modelos utilizam os mesmos conceitos de Black and Scholes para buscar fórmulas fechadas para se obter o preço de uma opção, como é o caso do primeiro modelo de Merton, que basicamente inclui a precificação com dividendos ao modelo de Black and Scholes.

No caso das opções com barreira, o primeiro a chegar a uma formula fechada foi Merton em 1973, que descreveu como precificar uma *call down and out*. Somente em 1991 Reiner & Rubinstein descreveram as fórmulas para os oito tipos de barreira, mas foi em 1998 que Espen Haug desenvolveu a generalização para as fórmulas de Reines & Rubinstein.

Como mencionado anteriormente, usaremos o termo Black and Scholes para qualquer fórmula fechada.

Vantagens

O modelo é altamente utilizado por muitos operadores devido a sua capacidade de resposta rápida. Além disso, conta com uma significativa vantagem de implantação, visto que é o único que poderia ser utilizado facilmente sem a ajuda de uma planilha. Tem a capacidade de precificar gregas com fórmulas fechadas, não sendo necessária a análise de cenários, como nos modelos numéricos. É facilmente encontrado na literatura.

Desvantagens

O modelo é muito limitado em relação à necessidade de mudanças de parâmetros, tanto que, para ser utilizado a fim de precificar opções com características diferentes devem ser usadas fórmulas, às vezes, completamente diferentes, como é o caso das opções com barreira. Não existe um método preciso para se precificar opções americanas utilizando fórmulas fechadas. Apesar de poder ser facilmente aplicado, o modelo é de difícil compreensão.

5.1.2 Binomial

O método de precificação de opções utilizando árvores binomiais foi inicialmente apresentado por Cox, Ross & Rubinstein em 1979. Foi de extrema importância para a evolução da precificação das opções, visto que foi o primeiro método capaz de precificar, com precisão e em tempo razoável para a época, uma grande quantidade de tipos de opção.

O trabalho de Cox, Ross & Rubinstein em 1979 com as árvores binomiais também incluía a precificação de opções com barreira.

Vantagens

O modelo é altamente simples de ser compreendido e pode ser facilmente aplicado para diversos tipos de opção. Visto que analisa período a período a vida do ativo, esse modelo pode ser utilizado para a maioria das chamadas *Path-Dependent Options* (ou opções que dependem do caminho do ativo).

Comparado com outros modelos numéricos, como as simulações de Monte Carlo, as árvores binomiais têm um ótimo desempenho computacional.

O modelo é razoavelmente bem encontrado na literatura.

Desvantagens

Apesar da compreensão do modelo ser relativamente fácil, sua aplicação não é. Outro ponto desfavorável para este modelo é a dificuldade da mudança de análise para precificar outros tipos de opção, o que pode ser facilmente feito, por exemplo, com simulações de Monte Carlo.

Quando se trata de opção com maior nível de complexidade, como as Asiáticas, ou quando se trata de opção com um maior nível de incerteza, o modelo não é prático.

5.1.3 Trinomial

O modelo foi proposto por Phelim Boyle em 1986, sendo apresentado como uma solução mais elegante do que as árvores binomiais. Apesar de muito útil, o método não pode ser considerado revolucionário.

O método de Boyle pode ser aplicado para opções com barreira.

Vantagens

As árvores trinomiais convergem mais rapidamente para a solução do que as binomiais, ou seja, usam menor número de simulações para obter um resultado estável. Isto não significa, necessariamente, menor tempo de processamento. Sua compreensão pode ser considerada mais lógica em comparação com o modelo binomial.

Desvantagens

Sua aplicação é extremamente mais complicada do que a de uma árvore binomial. Existe muito pouco sobre este método na literatura, o que torna ainda mais difícil sua implantação.

Se as análises de cenário podem ser consideradas difíceis nas árvores binomiais, elas trazem um desafio maior ainda quando se trata de árvores trinomiais.

5.1.4 Monte Carlo

Pheim Boyle, além de propor o uso das árvores trinomiais também foi o primeiro a utilizar simulações de Monte Carlo para precificar opções. Isso ocorreu em 1977, e, apesar de sua utilização no campo das opções ser revolucionária, a baixa capacidade de processamento da época não permitia seu uso em larga escala.

Vantagens

O método pode ser considerado o mais poderoso de todos. É capaz de precificar, com muita precisão, todos os tipos imaginários de opções, devido a sua grande flexibilidade. A compreensão é razoavelmente fácil, assim como sua aplicação.

Pode ser facilmente utilizado para qualquer tipo de análise, pois paraqualquer mudança necessária nas características de uma opção o modelo pode ser rapidamente alterado e a opção reprecificada.

É encontrado em larga escala na bibliografia.

Desvantagens

Devido ao tempo gasto com este modelo, ele é considerado a última opção. Não é uma solução elegante, sendo considerada força bruta.

5.2 CALIBRANDO OS MODELOS NUMÉRICOS

Nesta parte do trabalho buscaremos achar qual é o nível ideal de simulações para os modelos numéricos. Obviamente, se olharmos somente a precisão, iremos escolher um nível inaceitável de tempo de processamento, por outro lado, se unicamente colocássemos um limite para o tempo de precificação, não estaríamos sendo precisos o suficiente.

Primeiramente iremos determinar qual o nível de simulações para uma variável controle. Como já discutido anteriormente, esta variável será um Monte Carlo com muitas simulações, sem limite de tempo. Para determinar isso faremos testes com de 1 milhão a 10 milhões de simulações, buscando o ponto de convergência do modelo.

Posteriormente iremos analisar cada um dos modelos numéricos, criando um gráfico com o erro absoluto em relação a uma variável de controle juntamente com o tempo de processamento em função do número de simulações. Os critérios de parada serão os seguintes: erro absoluto menor do que $0.0025 e tempo de simulação menor do que 20 segundos

O motivo para essas escolhas é bem simples. Primeiramente, 20 segundos pode ser considerado o tempo limite que um cliente vai esperar um preço ao telefone. Uma espera maior deve afetar o fechamento do negócio. O limite de $0.0025 pode ser explicado como um limite de potencial perda, pois se estivéssemos em um negócio de R$10 milhões (volume que não é incomum no mercado de opções) estaríamos perdendo R$25 mil com este erro, perda que pode ser considerada significante devido a um erro no modelo.

Para o caso das *Plain Vanilla,* as opções utilizadas serão as seguintes:

- *Call*
- *Spot* $100
- *Strike* $120
- Volatilidade de 30%
- Taxa de Juros de 8%
- Tempo para o vencimento de seis meses

No caso das opções com barreira usaremos:

- *Call up and out*
- *Spot* $100

- *Strike* $100
- Volatilidade de 30%
- Taxa de Juros de 10%
- Tempo para o vencimento de seis meses
- Barreira $120

A escolha desse cenário deve-se ao foto de este ser um cenário mediano em comparação com a análise principal que este trabalho irá realizar.

5.2.1 Controle

Abaixo se encontra uma tabela com o resumo dos testes feitos com o modelo de Monte Carlo com muitas simulações (o tempo de simulação está mostrado apenas por questões ilustrativas). A precisão que se busca é a de $0.0001 (referente a $1 mil em um negócio de $10 milhões).

Para as *Plain Vanillas*:

Teste para Determinar o número de Simulações do Controle										
Simulações (Milhões)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultado	$3.4235	$3.4174	$3.4072	$3.4057	$3.4055	$3.4055	$3.4055	Erro	Erro	Erro
Tempo (mm:ss)	00:47	01:34	02:20	03:05	03:54	04:50	05:42	Erro	Erro	Erro

Tab5.1 Teste para Determinar o número de Simulações do Controle (*Plain Vanilla)*

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA

Para as Barreiras:

Teste para Determinar o número de Simulações do Controle										
Simulações (Milhões)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultado	$1.0256	$1.0262	$1.0279	$1.0271	$1.0272	$1.0273	$1.0272	Erro	Erro	Erro
Tempo (mm:ss)	01:14	02:29	03:48	04:49	06:08	07:27	08:46	Erro	Erro	Erro

Tab5.2 Teste para Determinar o número de Simulações do Controle (Barreiras*)*

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA

Podemos perceber que, nos dois casos, os resultados convergem a partir de 4,000,000 de simulações. Para garantir os resultados (como o tempo de simulação é irrelevante para esta variável), usaremos 5,000,000 simulações durante as análises.

O erro obtido em precificações com mais de oito milhões se deve aos tamanhos das variáveis no VBA. Provavelmente este erro pode ser sanado modificando a declaração das variáveis, porém isto não é de interesse para o trabalho.

5.2.2 Binomial

Abaixo se encontra o gráfico do preço da opção e do tempo de simulação em função do número de simulações para o cenário proposto.

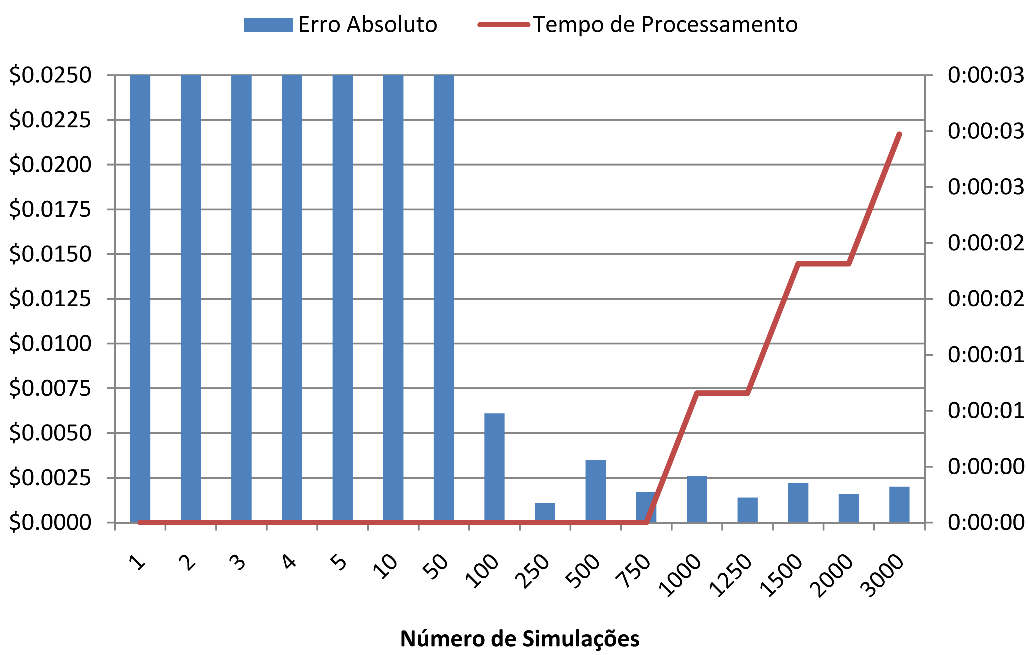

Fig5.2 Teste de Calibragem do Modelo Binomial (*Plain Vanilla)*

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA

Nota-se, a partir deste gráfico, que o ponto de convergência é próximo às 1250 simulações. Portanto, para garantir um bom resultado, iremos usar 1500 simulações para o caso de uma *Plain Vanilla*.

É importante notar que o número de simulações deve variar com o tempo para o vencimento, ou seja, durante a simulação principal do trabalho usaremos, para três meses, 750 simulações e, para um ano, 3000.

Para as opções com barreira temos:

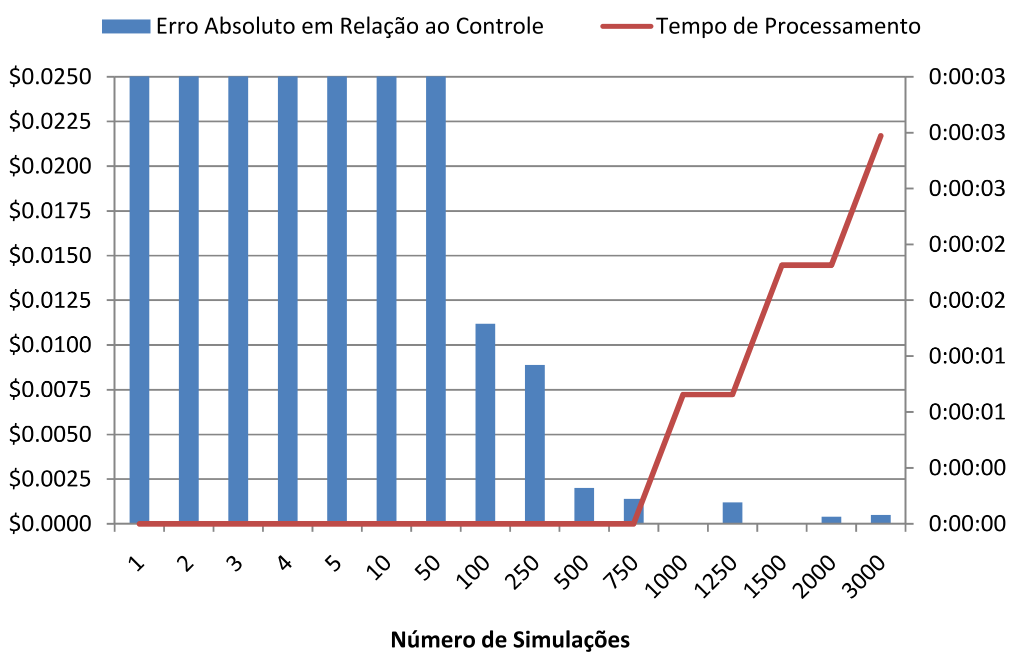

Fig5.3 Teste de Calibragem do Modelo Binomial (Barreira*)*

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA

Nota-se, a partir deste gráfico, que o ponto de convergência é próximo às 500 simulações. Portanto, para garantir um bom resultado, iremos usar 750 simulações para o caso de uma opção com Barreira.

É importante notar que o número de simulações deve variar com o tempo para o vencimento, ou seja, durante a simulação principal do trabalho usaremos, para três meses, 375 simulações e, para um ano, 1500.

Adicionalmente, também é possível concluir que para o caso das Barreiras a conversão do modelo se dá com um número menor de simulações.

5.2.3 Trinomial

Abaixo se encontra o gráfico do preço da opção e do tempo de simulação em função do número de simulações para o cenário proposto.

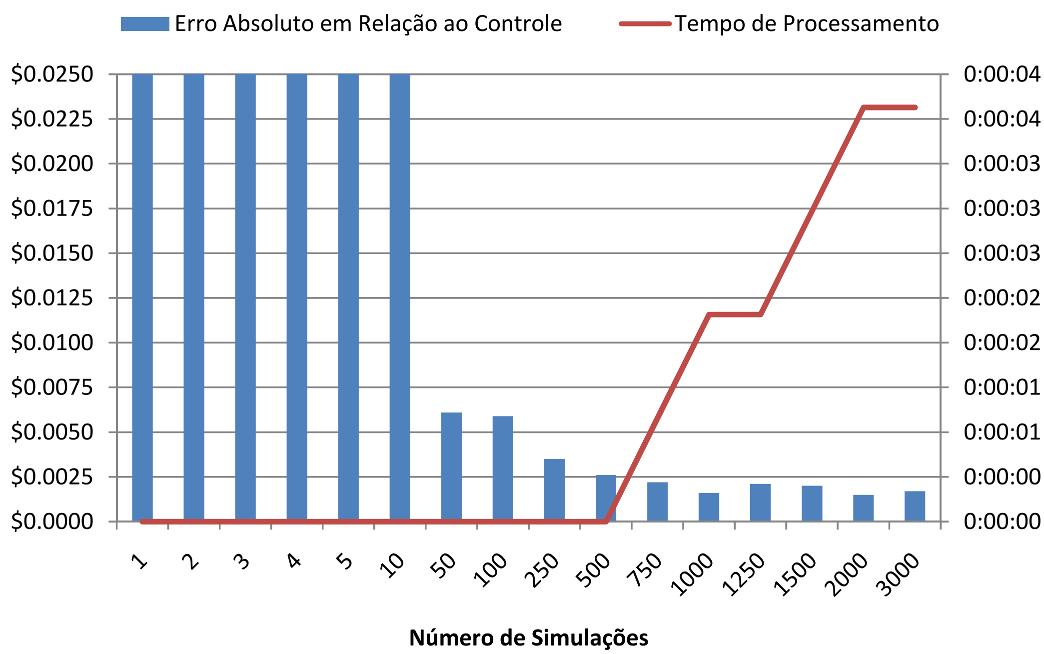

Fig5.4 Teste de Calibragem do Modelo Trinomial (*Plain Vanilla)*

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA

Nota-se, a partir deste gráfico que o ponto de convergência é próximo às 750 simulações. Portanto, para garantir um bom resultado, iremos usar 1000 simulações para o caso de uma *Plain Vanilla*.

É importante notar que o número de simulações deve variar com o tempo para o vencimento, ou seja, durante a simulação principal do trabalho usaremos, para três meses, 500 simulações e, para um ano, 2000.

Para as opções com barreira temos:

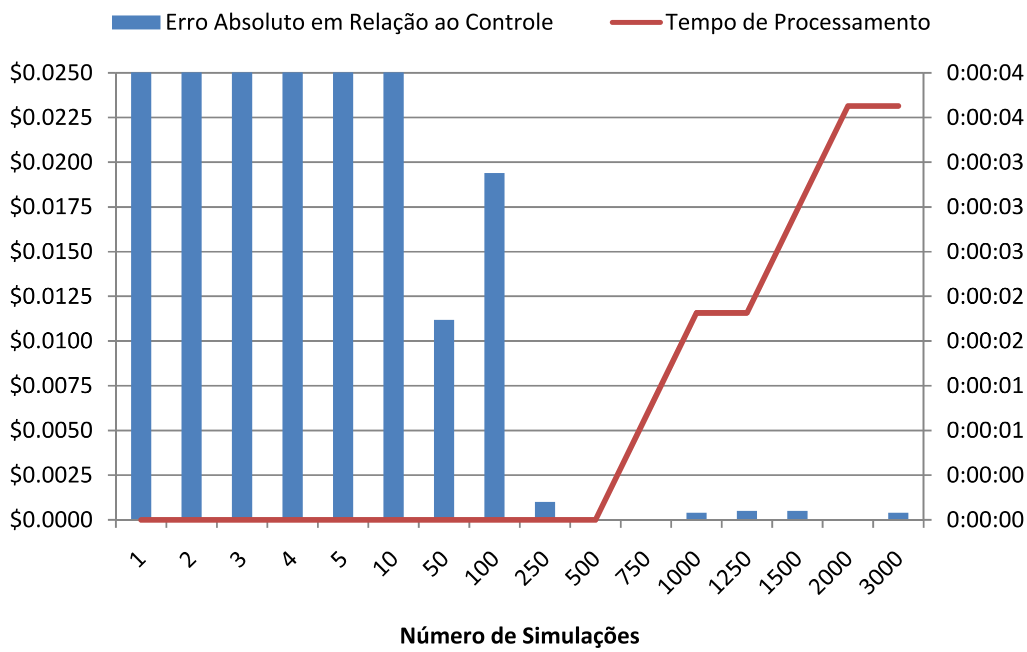

Fig5.5 Teste de Calibragem do Modelo Trinomial (Barreira)

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA

Nota-se, a partir deste gráfico, que o ponto de convergência é próximo às 250 simulações. Portanto, para garantir um bom resultado, iremos usar 500 simulações para o caso de uma opção com Barreira.

É importante notar que o número de simulações deve variar com o tempo para o vencimento, ou seja, durante a simulação principal do trabalho usaremos, para três meses, 250 simulações e, para um ano, 1000.

Como no caso das árvores binomiais, aqui também é possível concluir que, para o caso das Barreiras, a conversão do modelo se dá com um número menor de simulações.

5.2.4 Monte Carlo

Abaixo se encontra o gráfico do preço da opção e do tempo de simulação em função do número de simulações para o cenário proposto.

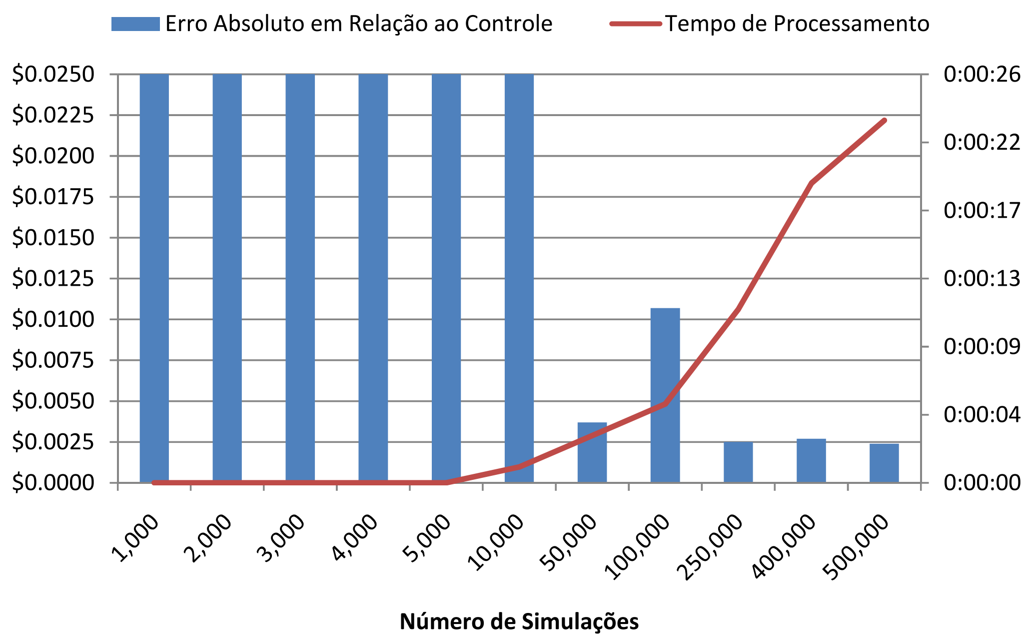

Fig5.6 Teste de Calibragem do Modelo de Monte Carlo (*Plain Vanilla)*

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA

Nota-se, a partir deste gráfico, que o ponto de convergência é próximo às 500,000 simulações. Porém, a barreira de 20s de tempo de simulação não pode ser batida, assim, usaremos 400,000 simulações para o caso de uma *Plain Vanilla*.

Diferentemente dos outros modelos numéricos, no Monte Carlo não será necessário variar o número de simulações, segundo o tempo, até o vencimento.

Para as opções com barreira temos:

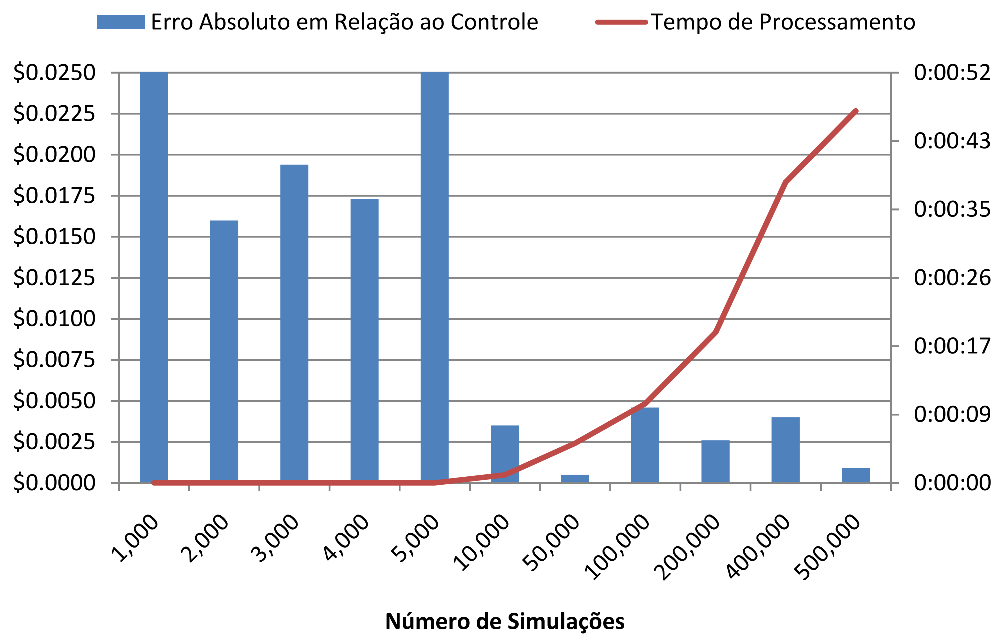

Fig5.7 Teste de Calibragem do Modelo de Monte Carlo (Barreira*)*

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA

Nota-se, a partir deste gráfico que o ponto de convergência é próximo às 500,000 simulações. Porém, a barreira de 20s de tempo de simulação não pode ser batida, assim, usaremos 200,000 simulações para o caso de uma opção com Barreira.

Diferentemente dos outros modelos numéricos, no Monte Carlo não será necessário variar o número de simulações, segundo o tempo, até o vencimento.

5.3 RESULTADOS COMPARATIVOS

Nesta seção estão apresentados os resultados que foram obtidos a partir da precificação de cada tipo de opção utilizando cada modelo.

Como explicado anteriormente, cada modelo foi submetido à precificação de uma série de tipos de opções, apresentados no Anexo A deste trabalho. Além disto, estas opções também foram precificadas utilizando um Monte Carlo com 5,000,000 de simulações. Esta última precificação demanda um alto tempo de processamento, tornando impossível o uso desta técnica para o dia a dia de um negociador desses derivativos. Por ser considerado a maneira mais precisa de precificação, o Monte Carlo com 5,000,000 simulações se tornou a variável controle deste experimento.

Portanto, abaixo encontra-se uma tabela comparativa dos preços obtidos (apresentados no Anexo B), mostrando não só o erro absoluto em relação ao controle, como também o desvio padrão (e as variáveis que levam ao seu cálculo) de cada modelo.

Lista das Opções Precificadas

Modelo	*Plain Vanilla*				Barreira			
	Média dos Erros (X)	N - 1	$\Sigma (X_i - X)^2$	Desvio Padrão (s)	Média dos Erros (X)	N - 1	$\Sigma (X_i - X)^2$	Desvio Padrão (s)
Black and Shoes	$0.0035	47	4.81E-04	$0.0032	$0.0019	31	2.28E-04	$0.0027
Árvore Binomial	$0.0036	47	4.96E-04	$0.0033	$0.0023	31	1.80E-04	$0.0024
Árvore Trinomial	$0.0036	47	4.83E-04	$0.0032	$0.0024	31	2.68E-04	$0.0029
Monte Carlo	$0.0130	47	1.47E-02	$0.0177	$0.0125	31	1.69E-02	$0.0234

Tab5.3 Comparação entre os Preços de Cada Modelo

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA

A partir desta tabela podemos realizar um teste de variâncias e a análise de variância, para verificar se existe alguma diferença significativa entre os erros dos preços obtidos com cada modelo. Se isto for verdade, este modelo levará automaticamente nota 0 no quesito precisão do Índice SiPA, tendo assim seu desempenho altamente afetado na escolha do melhor modelo. Usaremos 5% de significância para todos os testes.

5.3.1 Plain Vanilla

Para o teste de variância temos:

$$g_{5\%,48,4} = \frac{0.00031329}{0.00034466} = 0.908982$$

Como este resultado é maior do que o valor obtido na tabela de teste de Cochran (0.3093) devemos rejeitar a hipótese de que todas as variâncias são iguais. Podemos suspeitar que o dado que não está de acordo é a variância do Monte Carlo, fato que é comprovado por meio de um novo teste de variâncias, sem o Monte Carlo:

$$g_{5\%,48,3} = \frac{0.00001089}{0.00003137} = 0.347147$$

Como o valor obtido na tabela de teste de Cochran (0.4031) é menor do que esse, devemos aceitar que as variâncias do *Black and Scholes*, da Árvore Binomial e da Árvore Trinomial não possuem diferenças estatisticamente significantes. Portanto, realizaremos a análise de variância somente com estes modelos, sendo que Monte Carlo já tem, automaticamente, nota 0, no critério de precisão, para as *Plain Vanillas*.

Abaixo encontra-se o resultado desta análise de variância, gerado pelo *software* Minitab.

One-way ANOVA: Black and Scholes, Binomial, Trinomial

```
Source   DF         SS         MS     F      P
Factor    2  0.0000001  0.0000000  0.00  0.998
Error   141  0.0014605  0.0000104
Total   143  0.0014605

S = 0.003218   R-Sq = 0.00%   R-Sq(adj) = 0.00%
```

```
Level                N      Mean     StDev
Black and Scholes   48  0.003533  0.003198
Binomial            48  0.003573  0.003250
Trinomial           48  0.003573  0.003206

                    Individual 95% CIs For Mean Based on Pooled StDev
Level               --------+---------+---------+---------+-
Black and Scholes   (-----------------*-----------------)
Binomial             (-----------------*------------------)
Trinomial            (-----------------*-----------------)
                    --------+---------+---------+---------+-
                          0.00300   0.00350   0.00400   0.00450

Pooled StDev = 0.003218
```

Como o valor de P (99,80%) é superior ao nível de significância (5%), podemos considerar que estes três modelos não possuem diferenças estatisticamente significativas nos erros em relação à variável controle.

5.3.2 Barreira

Para o teste de variância temos:

$$g_{5\%,48,4} = \frac{0.00054756}{0.00056902} = 0.962286$$

Como este resultado é maior do que o valor obtido na tabela de teste de Cochran (0.3720) devemos rejeitar a hipótese de que todas as variâncias são iguais. Podemos suspeitar que o dado que não está de acordo é a variância do Monte Carlo, fato que é comprovado por meio de um novo teste de variâncias, sem o Monte Carlo:

$$g_{5\%,48,3} = \frac{0.00000841}{0.00002146} = 0.391892$$

Como o valor obtido na tabela de teste de Cochran (0.4748) é maior do que esse, devemos aceitar que as variâncias do *Black and Scholes*, da Árvore Binomial e da Árvore Trinomial não possuem diferenças estatisticamente significativas. Portanto, realizaremos a análise de variância somente com esses modelos, sendo que Monte Carlo já tem, automaticamente, nota 0, no critério de precisão, para o caso das Barreiras.

Abaixo encontra-se o resultado desta análise de variância, gerado pelo *software* Minitab.

One-way ANOVA: Black and Scholes, Binomial, Trinomial

```
Source  DF         SS         MS     F      P
Factor   2  0.0000039  0.0000019  0.27  0.765
Error   93  0.0006752  0.0000073
Total   95  0.0006791

S = 0.002695   R-Sq = 0.57%   R-Sq(adj) = 0.00%



Level               N      Mean     StDev
Black and Scholes  32  0.001947  0.002710
Binomial           32  0.002281  0.002407
Trinomial          32  0.002428  0.002940

                   Individual 95% CIs For Mean Based on
                   Pooled StDev
Level              ---+---------+---------+---------+------
Black and Scholes  (--------------*---------------)
Binomial                (---------------*---------------)
Trinomial                  (--------------*---------------)
                   ---+---------+---------+---------+------
                    0.00120   0.00180   0.00240   0.00300

Pooled StDev = 0.002695
```

Como o valor de P (76,50%) é superior ao nível de significância (5%), podemos considerar que esses três modelos não possuem diferenças estatisticamente significativas nos erros em relação à variável controle.

5.4 ÍNDICE SIPA

Esta é, sem dúvida, a parte mais importante de toda a análise. Nela serão obtidos e apresentados todos os números que servirão de base para as conclusões do trabalho.

A determinação do Índice SiPA começa com a criação de critérios, cada um com seu peso. Depois disso, cada modelo recebe uma nota para cada critério, tanto para as opções *Plain Vanilla* como para as Barreiras. Por fim, o Índice SiPA será construído por meio da ponderação de cada uma dessas notas pelo peso de cada um dos critérios.

5.4.1 Critérios e Pesos

Como explicado anteriormente, cada critério terá peso de 1 a 4, dependendo de sua relevância para a avaliação. Abaixo encontra-se uma tabela que resume a escolha e os pesos de cada um.

Critérios do Índice SiPA	
Tipo	**Peso**
Precisão	4
Constância	2
Tempo de Processamento	3
Facilidade de compreensão do Modelo	1
Facilidade de encontrar literatura	1
Capacidade de modificar o modelo para outras Opções	3
Facilidade de modificar o modelo para outras Opções	2
Facilidade de implantação do modelo	2
Risco operacional ao utilizar o modelo	2
Risco Sistêmico ao utilizar o modelo	2

Tab5.4 Critérios do Índice SiPA

Fonte: Elaborado pelo Autor

Precisão

Peso: **4**

A precisão dos modelos é, sem dúvida, o mais importante dos critérios, portanto tem de ser o critério com mais peso no Índice SiPA. Esta relevância se dá devido ao fato de que este é o critério que tem o maior potencial de gerar uma perda financeira.

A nota da precisão será determinada segundo a média dos erros absolutos entre o controle e o modelo, encontrada nas simulações por meio do SiPA. Lembrando que, se o modelo não for aprovado pelo teste estatístico, sua nota de precisão será 0.

Será medido o erro absoluto em relação à variável controle. A nota será dada segundo o seguinte critério:

Nota em relação à Precisão										
Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Erro Absoluto	Acima de .018	.016 .018	.014 .016	.012 .014	.010 .012	.008 .010	.006 .008	.004 .006	.002 .004	0 a .002

Tab5.5 Critério para nota em relação à Precisão

Fonte: Elaborado pelo Autor

Constância

Peso: **2**

Se dois modelos obtiverem a mesma média de erros absolutos em relação ao controle, qual deve ser mais preciso? Obviamente o que for mais constante, pois no caso de resultados mais inconstantes, maiores as chances de se obter um preço muito errado. Este critério, entretanto, deve ter um peso menor do que a precisão e o tempo.

A nota da constância será determinada segundo o desvio padrão dos erros absolutos entre o controle e o modelo.

Será calculado o desvio padrão do erro absoluto em relação à variável controle. A nota será dada segundo o seguinte critério (mesmos valores da precisão):

Nota em relação à Constância										
Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Desvio	Acima de .018	.016 .018	.014 .016	.012 .014	.010 .012	.008 .010	.006 .008	.004 .006	.002 .004	0 a .002

Tab5.6 Critério para nota em relação à Constância

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tempo de Processamento

Peso: **3**

O tempo de processamento é um quesito altamente relevante (por isso o peso elevado), pois os mercados de derivativos são ambientes altamente dinâmicos, ou seja, um preço pode mudar a cada instante, o que torna vital para o bom funcionamento de um modelo de precificação a capacidade de prover rapidamente um preço.

O tempo de processamento é fornecido pelo SiPA. Será utilizada a média de todas as simulações para dar a nota segundo:

Nota em relação ao Tempo de processamento										
Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tempo (s)	Acima de 18	16 a 18	14 a 16	12 a 14	10 a 12	8 a 10	6 a 8	4 a 6	2 a 4	0 a 2

Tab5.7 Critério para nota em relação ao Tempo de processamento

Fonte: Elaborado pelo Autor

Facilidade de compreensão do Modelo

Peso: **1**

A facilidade de compreensão de um modelo deve ser considerada nesta avaliação, porém com um peso mínimo. O motivo para isso é que este é um critério que pode ser avaliado apenas como um facilitador para o usuário, pois este não precisa compreender o modelo para conseguir utilizá-lo, podendo utilizar algum *software* previamente programado para utilizar o modelo.

Obviamente este é um critério subjetivo, e sua nota dependerá do julgamento do autor após construir todos os modelos para o SiPA.

Facilidade de encontrar literatura

Peso: **1**

A facilidade de encontrar literatura sobre cada modelo pode ser considerada, também, um critério facilitador, e por isso deve ter a nota mínima.

Apesar de esse ser considerado um critério qualitativo, será mensurado quantitativamente. Utilizamos o Google e daremos a nota deste critério segundo o número de resultados para a pesquisa *"XXX Option Pricing Model"*. Sendo que, para as opções com barreira será adicionado um *"+Barrier"* na pesquisa.

A nota deste critério será dada da seguinte maneira:

Nota em relação à Facilidade de encontrar literatura										
Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Respostas do Google	0 a 20k	20k a 40k	40k a 60k	60k a 80k	80k a 100k	100k a 120k	120k a 140k	140k a 160k	160k a 180k	Acima de 180k

Tab5.8 Critério para nota em relação à Facilidade de encontrar literatura

Fonte: Elaborado pelo Autor

Capacidade de modificar o modelo para outras Opções

Peso: **3**

Este critério deve ser considerado como a maior vantagem que os modelos numéricos têm em relação às fórmulas fechadas e, por ser um quesito de alta relevância, que traz vários benefícios, tem um alto peso nesta análise.

Este é um critério subjetivo, e sua nota dependerá do julgamento do autor após construir todos os modelos para o SiPA.

Facilidade de modificar o modelo para outras Opções

Peso: **2**

Ao levar em conta a capacidade de um modelo para adaptar-se a outras opções, também devemos analisar a facilidade com que isso pode ser feito. Entretanto, este critério deve ter um peso menor do que o da capacidade.

Este é um critério subjetivo, e sua nota dependerá do julgamento do autor após construir todos os modelos para o SiPA.

Facilidade de implantação do modelo

Peso: **2**

A facilidade de se implantar algum modelo, utilizando um *software*, deve ser considerada, pois quanto maiores as dificuldades encontradas nesta etapa maiores os custos de programação. Por ser um critério que tem alta correlação com os custos de um projeto, deve ter um peso mediano na análise. Este é um critério subjetivo, e sua nota dependerá do julgamento do autor, após construir todos os modelos para o SiPA.

Risco operacional ao utilizar o modelo

Peso: **2**

O risco operacional se dá quanto maior a quantidade de entradas que o modelo tiver. Por se tratar de um risco à precisão do sistema, deve ter um peso mediano. Este é um critério subjetivo, e sua nota dependerá do julgamento do autor, após construir todos os modelos para o SiPA.

Risco sistêmico ao utilizar o modelo

Peso: **2**

O risco sistêmico se dá quanto maior a complexidade do modelo, pois isto pode trazer falhas na precificação. Por se tratar de um risco à precisão do sistema, este deve ter um peso mediano. Este é um critério subjetivo, e sua nota dependerá do julgamento do autor após construir todos os modelos para o SiPA.

5.4.2 Notas e Justificativas

Esta é a seção em cada um dos modelos é julgado segundo seu desempenho. Após ter determinado quais os critérios pelos qual cada modelo será analisado, os resultados seguem abaixo. Posteriormente encontram-se as justificativas para cada nota.

Notas do Índice SiPA								
Tipo	**Black and Scholes**		**Árvore Binomial**		**Árvore Trinomial**		**Monte Carlo**	
	Plain Vanilla	Barreira	*Plain Vanilla*	Barreira	*Plain Vanilla*	Barreira	*Plain Vanilla*	Barreira
Precisão	9	10	9	9	9	9	0	0
Constância	9	9	9	9	9	9	2	1
Tempo de Processamento	10	10	10	10	10	10	1	1
Facilidade de compreensão do Modelo	4	1	7	5	6	4	8	6
Facilidade de encontrar literatura	9	1	4	1	3	1	10	2
Capacidade de modificar o modelo para outras Opções	3	3	7	7	7	7	10	10
Facilidade de modificar o modelo para outras Opções	1	1	7	7	6	6	9	9
Facilidade de implantação do modelo	10	9	6	3	4	2	8	7
Risco operacional ao utilizar o modelo	10	9	8	7	8	7	5	4
Risco Sistêmico ao utilizar o modelo	10	8	7	5	7	5	4	2

Tab5.9 Notas do Índice SiPA

Fonte: Elaborado pelo Autor

Abaixo encontram-se as justificativas para cada nota da seguinte maneira:

Critério

Nota *Plain Vanilla*: **Black and Scholes, Binomial, Trinomial, Monte Carlo**

Nota Barreira: **Black and Scholes, Binomial, Trinomial, Monte Carlo**

Justificativas.

Fig5.8 Maneira como as Notas e justificativas estão dispostas

Fonte: Elaborado pelo Autor

Precisão

Nota *Plain Vanilla*: **9, 9, 9, 0**

Nota Barreira: **10, 9, 9, 0**

Abaixo se encontra a tabela referente às pesquisas feitas para indicar a facilidade de encontrar literatura sobre cada modelo, assim como as notas referentes ao critério determinado na seção 5.4.1.

Erro absoluto em relação ao Controle e Notas				
Modelo	**Erro Absoluto**		**Notas**	
	Plain Vanilla	Barreira	*Plain Vanilla*	Barreira
Black and Scholes	$0.0035	$0.0019	9	10
Árvore Binomial	$0.0036	$0.0023	9	9
Árvore Trinomial	$0.0036	$0.0024	9	9
Monte Carlo *	$0.0130	$0.0125	0	0

Tab5.10 Nota em relação à Precisão

Fonte: Elaborado pelo Autor

* Monte Carlo obteve nota 0 pois determinou-se na seção 5.3, que este possui diferenças estatisticamente significativas em relação aos seus concorrentes

Constância

Nota *Plain Vanilla*: **9, 9, 9, 2**

Nota Barreira: **9, 9, 9, 1**

Abaixo se encontra a tabela referente às pesquisas feitas para indicar a facilidade de encontrar literatura sobre cada modelo, assim como as notas referentes ao critério determinado na seção 5.4.1.

Desvio Padrão do Erro e Notas				
Modelo	**Desvio Padrão**		**Notas**	
	Plain Vanilla	Barreira	*Plain Vanilla*	Barreira
Black and Scholes	$0.0032	$0.0027	9	9
Árvore Binomial	$0.0033	$0.0024	9	9
Árvore Trinomial	$0.0032	$0.0029	9	9
Monte Carlo	$0.0177	$0.0234	2	1

Tab5.11 Nota em relação à Consância

Fonte: Elaborado pelo Autor

Tempo de Processamento

Nota *Plain Vanilla*: **10, 10, 10, 1**

Nota Barreira: **10, 10, 10, 1**

Abaixo se encontra a tabela referente às pesquisas feitas para indicar a facilidade de encontrar literatura sobre cada modelo, assim como as notas referentes ao critério determinado na seção 5.4.1.

Tempo de Processamento e Notas				
Modelo	Tempo de Processamento		Notas	
	Plain Vanilla	Barreira	*Plain Vanilla*	Barreira
Black and Scholes	00:00	00:00	10	10
Árvore Binomial	00:01	00:00	10	10
Árvore Trinomial	00:02	00:00	10	10
Monte Carlo	00:19	00:18	1	1

Tab5.12 Nota em relação ao Tempo de processamento

Fonte: Elaborado pelo Autor

Facilidade de compreensão do Modelo

Nota *Plain Vanilla*: **4, 7, 6, 8**

Nota Barreira: **1, 5, 4, 6**

Dentre os modelos analisados, o que possui maior facilidade de compreensão é o Monte Carlo, pois este método é o único que não utiliza qualquer artifício para simular o movimento *browniano* de um ativo. Ele simplesmente simula estas condições e testa-as diversas vezes. As árvores binomiais e trinomiais são de compreensão razoavelmente simples, sendo que a trinomial tem uma dificuldade extra, por isso da nota um ponto menor. Já o modelo de *Black and Scholes* é de compreensão árdua, pois vêem de uma complexa derivação da fórmula genérica de movimento *browniano*.

As dificuldades de compreensão dos modelos para opções com barreira geram uma nota normalmente dois pontos menor do que a do *Plain Vanilla*. Entretanto as fórmulas fechadas para essas modalidades de opção são de dificílima compreensão, portanto têm quatro pontos a menos do que seu equivalente para as *Plain Vanilla*.

Facilidade de encontrar literatura

Nota *Plain Vanilla*: **9, 4, 3, 10**

Nota Barreira: **1, 1, 1, 2**

Abaixo se encontra a tabela referente às pesquisas feitas para indicar a facilidade de encontrar literatura sobre cada modelo, assim como as notas referentes ao critério determinado na seção 5.4.1.

Número de Resposta a pesquisa no Google e Notas				
Modelo	**Resultado do Google**		**Notas**	
	Plain Vanilla	Barreira	*Plain Vanilla*	Barreira
Black and Scholes	174,000	15,100	9	1
Árvore Binomial	60,300	10,100	4	1
Árvore Trinomial	53,300	1,990	3	1
Monte Carlo	199,000	23,200	10	2

Tab5.13 Nota em relação à facilidade de encontrar literatura

Fonte: Elaborado pelo Autor

Capacidade de modificar o modelo para outras Opções

Nota *Plain Vanilla*: **3, 7, 7, 10**

Nota Barreira: **3, 7, 7, 10**

Dentre os modelos analisados, o que possui maior capacidade de modificação é o Monte Carlo, pois tem a capacidade de precificar qualquer tipo de opção, daí a maior nota neste quesito. Os modelos das árvores podem ser usados para muitos tipos de opção, sendo que não há diferenças nas quantidades de opções que cada um pode precificar, sendo assim os dois modelos têm a mesma nota, três pontos a menos do que o Monte Carlo. As fórmulas de *Black and Scholes* não são nem um pouco flexíveis, o que se revelou o maior ponto fraco do modelo, porém por ter alguma capacidade de adaptação para outras opções, terá nota três.

Este é um critério no qual estamos avaliando os modelos como um todo, portanto as notas referentes às opções com Barreira são iguais as das *Plain Vanillas*.

Facilidade de modificar o modelo para outras Opções

Nota *Plain Vanilla*: **1, 7, 6, 9**

Nota Barreira: **1, 7, 6, 9**

O modelo de Monte Carlo não é somente o que melhor se adapta a outros tipos de opção, mas é também o que faz isso com maior facilidade. Os modelos das árvores apresentam alguma dificuldade a mais para realizar as adaptações, sendo que o modelo trinomial possui algumas dificuldades extras, como a determinação da probabilidade do ativo não se mover. Já os métodos de fórmulas fechadas possuem uma dificuldade enorme para se adaptar à precificação de outras opções, pois, para cada novo tipo um novo estudo deve ser feito para buscar fórmulas muitas vezes completamente diferentes.

Este é um critério no qual estamos avaliando os modelos como um todo, portanto, as notas referentes às opções com Barreira são iguais as das *Plain Vanillas*.

Facilidade de implantação do modelo

Nota *Plain Vanilla*: **10, 6, 4, 8**

Nota Barreira: **9, 3, 2, 7**

Não há dúvidas de que o modelo mais fácil de ser implantado é o de *Black and Scholes*, pois a dificuldade de se escrever apenas uma fórmula é mínima. O modelo de Monte Carlo também apresenta razoável facilidade de implantação, visto que também apresenta poucas fórmulas. Os modelos das árvores são os que apresentam maior complexidade para serem criados, especialmente o trinomial.

No caso das barreiras a dificuldade é praticamente a mesma, tanto no caso da fórmula fechada quanto no caso de Monte Carlo. Porém a implantação das árvores para precificar este tipo de derivativo traz altas complicações.

Risco operacional ao utilizar o modelo

Nota *Plain Vanilla*: **10, 8, 8, 5**

Nota Barreira: **9, 7, 7, 4**

As fórmulas fechadas são as que menos possuem entradas (pois não dependem de números de simulações), portanto têm menor risco operacional, obtendo a maior nota neste quesito. Os modelos numéricos tem uma entrada a mais, o número de simulações, gerando uma nota dois pontos menor do que o *Black and Scholes.* Devido ao fato de que quanto maior o tempo de simulação maior o tempo perdido em caso de erro, a nota do Monte Carlo deve ser bem menor do que as outras.

Para as opções com barreira temos uma entrada a mais, a barreira, o que torna o risco operacional maior, assim sendo as notas dos modelos para opção com barreira são 1 ponto menor do que as notas dos *Plain Vanillas*.

Risco Sistêmico ao utilizar o modelo

Nota *Plain Vanilla*: **10, 7, 7, 4**

Nota Barreira: **8, 5, 5, 2**

O modelo de Monte Carlo é o mais suscetível a erros sistêmicos. Isso se evidenciou durante os testes para obtenção das variáveis de controle, e se dá devido à necessidade de elevados números de simulações, gerando um risco maior de erro no sistema. As árvores têm o mesmo risco sistêmico, um pouco menos do que o Monte Carlo. O modelo de *Black and Scholes* é o que sofre menor risco de um erro sistêmico, sendo este muito baixo.

As modelos para opções com barreira levam um risco extra, devido à necessidade de mais análises, portanto têm nota dois pontos menor do que o caso das *Plain Vanillas*.

5.4.3 Valor Final

É chegado o fim da análise dos modelos e da concepção do índice SiPA, portanto apresenta-se o resultado final que cada modelo atingiu na tabela abaixo.

Índice SiPA									
Tipo	**Peso**	**Black and Scholes**		**Árvore Binomial**		**Árvore Trinomial**		**Monte Carlo**	
		Plain Vanilla	Barreira	*Plain Vanilla*	Barreira	*Plain Vanilla*	Barreira	*Plain Vanilla*	Barreira
Precisão	**4**	36	40	36	36	36	36	0	0
Constância	**2**	18	18	18	18	18	18	4	2
Tempo de Processamento	**3**	30	30	30	30	30	30	3	3
Facilidade de compreensão do Modelo	**1**	4	1	7	5	6	4	8	6
Facilidade de encontrar literatura	**1**	9	1	4	1	3	1	10	2
Capacidade de modificar o modelo para outras Opções	**3**	9	9	21	21	21	21	30	30
Facilidade de modificar para outras Opções	**2**	2	2	14	14	12	12	18	18
Facilidade de implantação do modelo	**2**	20	18	12	6	8	4	16	14
Risco operacional ao utilizar o modelo	**2**	20	18	16	14	16	14	10	8
Risco Sistêmico ao utilizar o modelo	**2**	20	16	14	10	14	10	8	4
TOTAL		**168**	**153**	**172**	**155**	**164**	**150**	**107**	**87**
		321		**327**		**314**		**194**	

Tab5.14 Resultado final do Índice SiPA

Fonte: Elaborado pelo Autor

CONCLUSÃO

O capítulo final deste trabalho de formatura apresenta uma análise geral do estudo realizado, assim como as conclusões que puderam ser feitas por meio dos resultados obtidos.

A precificação de opções não é uma tarefa fácil de ser realizada, dada a complexidade que os modelos e os conceitos ganharam ao longo do tempo. Esta complexidade foi a maior responsável pelas dificuldades encontradas no desenvolvimento deste trabalho. Entretanto, com muita dedicação, disciplina e perseverança o aluno atingiu os objetivos que foram propostos.

As dificuldades enfrentadas pelo aluno também contribuíram não só para a sua formação de Engenheiro de Produção, mas também para a sua vida pessoal e profissional, mostrando que este trabalho pode ser realmente considerado o ponto alto do curso de graduação.

O desenvolvimento do *software* SiPA foi a primeira grande tarefa, e foi o que gerou toda a curiosidade para começar a desenvolver o tema. A criação de um *software*, por parte do aluno, não se dava por necessário para que os resultados fossem obtidos, porém isto gerou um conhecimento que seria muito mais difícil de ser obtido sem esta etapa. Existem conceitos que só podem ser obtidos na prática, dando muito mais acurácia ao trabalho. Além disso, este trabalho deve ser muito mais útil para futuros pesquisadores do assunto, pois traz todo esse conhecimento condensado em um *software* de código aberto.

A pergunta principal do projeto pode então ser finalmente respondida. Na opinião do autor, segundo o que foi desenvolvido aqui, é possível abandonar os modelos de formulação fechada e partir para a utilização somente de um modelo numérico, o modelo da árvore binomial. O motivo para isto é bem simples: a grande vantagem dos modelos de fórmula fechada, que é a obtenção de uma boa precisão com um tempo de processamento pequeno, pode ser completamente superada pelo método das árvores binomiais.

O modelo de Monte Carlo, apesar de ser o mais poderoso de todos, se mostrou incrivelmente incapaz de precificar, com eficiência, os tipos de opção analisados. Esse modelo recebeu a pior classificação no índice SiPA, porém ele tem o seu valor: existem tipos de opção que só podem ser precificados por meio dele. Portanto, tal modelo deve apenas ser considerado um último recurso. É bem verdade que existem *softwares* que são capazes de obter tempos de processamento melhores com este modelo do que o Excel, entretanto sua precisão ainda fica limitada a um elevado número de simulações.

O modelo da árvore Trinomial obteve também uma nota satisfatória, porém, devido aos problemas encontrados na implantação é preferível a utilização do método binomial. O curioso é que o modelo trinomial converge para a solução utilizando menos simulações do que seu "irmão mais novo", binomial. Apesar disso, este fato não se converte em menor tempo de simulação, devido à necessidade de uma conta a mais em cada nó.

As fórmulas fechadas tiveram um desempenho excelente, mostrando que é possível obter precisão por meio das premissas que foram assumidas na criação dos modelos. Definitivamente, não é possível negar que os dois economistas, Fischer Black e Myron Scholes, fizeram um trabalho incrível, revolucionando o mundo da precificação de opções. Porém o uso de fórmulas fechadas deteriora muito a flexibilidade de um modelo, e como atualmente o mundo dos derivativos é um mundo altamente dinâmico, esta flexibilidade é altamente requisitada.

Então, o conselho para alguém que queira começar a entender, precificar e negociar opções é o de utilizar o modelo das árvores binomiais para se guiar. Este é um modelo de simples compreensão, que tem ótimos níveis de precisão, com um tempo excelente de processamento. Apresenta apenas alguns obstáculos para implantação, os quais podem ser facilmente superados, se assim desejado. Entretanto, a recomendação aqui não significa que não se deve buscar a aprendizagem de algum outro modelo, pelo contrário, pois quanto mais conhecimento uma pessoa buscar, maiores chances de sucesso ela terá.

Por fim, este trabalho termina com uma sugestão de tema para futuros pesquisadores do assunto: Será que o mesmo resultado deve ser obtido na precificação de opções americanas?

BIBLIOGRAFIA

[1] ALVES, Aloisio Pinto. **Programação:** Codificação, Testes, Depuração de Erros, Documentação. São Paulo, Brasil: Atlas, 1978.

[2] BLACK, Fischer; SCHOLES, Myron. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, EUA, v.81 , p. 637 –55, Maio de 1973

[3] CLEWLOW, Les; STRICKLAND, Chris. **Exotic Options:** The State of the Art. Londres, Reino Unido: International Thomson Business Press, 1997

[4] COSTA NETO, P. L. **Estatística**. 2ª Ed. São Paulo, Brasil: Edgar Blücher, 2002

[5] FISHMAN, G. **Monte Carlo:** Concepts, Algorithms, and Its Applications, Volume II, second edition EUA, New York: Wiley, 1996.

[6] FORTUNA, Eduardo. **Mercado Financeiro:** Produtos e Serviços. 16ª Ed. Rio de Janeiro, Brasil: Qualimark, 2005.

[7] HAUG, Espen G. **The Complete Guide to:** Option Pricing Formulas**.** Second edition EUA, New York: Mc Graw Hill, 2007.

[8] HULL, John C. **Fundamentos dos Mercados Futuros e de Opções.** 4ª Ed. São Paulo, Brasil : BM&F, 2005.

[9] HULL, John C. **Opções, Futuros e Outros Derivativos.** 3a. ed. São Paulo, Brasil : BM&F, 1999.

[10] LION, Octavio M. B. **Derivativos.** São Paulo, Brasil: ANDIMA, 2006.

[11] MERTON, Robert C. Theory of Rational Option Pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science**, EUA, v. 4, p. 141-83, Junho de 1973

[12] REED Jr., Paul R. Desenvolvendo **Aplicativos com Visual Basic e UML:** Projeto e Implementação de Aplicativos Orientados a Objeto. São Paulo, Brasil: Makron Books, 2000.

[13] WILMOTT, Paul. **Derivatives:** The Theory and Practice of Financial Engineering. Chichester, EUA : John Wiley & Sons, 1999.

GLOSSÁRIO

Este glossário se encontra por ordem de relevância e não por ordem alfabética.

***Call* =** Opção de Compra

***Put* =** Opção de Venda

Payoff = Resultado da operação (Lucro ou Prejuízo)

***Spot* =** Preço a vista de um ativo

***Strike* =** Preço de exercício

Plain Vanilla = Opções simples

Long = posição comprada, titular do derivativo

Short = posição vendida, emissor do derivativo

ANEXOS A – LISTA DAS OPÇÕES PRECIFICADAS

Lista das Opções Precificadas							
Numero	**Tipo**	***Spot***	***Strike***	**Volatilidade**	**Taxa de Juros**	**Tempo (Meses)**	**Barreira**
1	*Call*	$100	$80	10%	5%	3	-
2	*Call*	$100	$80	10%	5%	12	-
3	*Call*	$100	$80	10%	14%	3	-
4	*Call*	$100	$80	10%	14%	12	-
5	*Call*	$100	$80	40%	5%	3	-
6	*Call*	$100	$80	40%	5%	12	-
7	*Call*	$100	$80	40%	14%	3	-
8	*Call*	$100	$80	40%	14%	12	-
9	*Call*	$100	$100	10%	5%	3	-
10	*Call*	$100	$100	10%	5%	12	-
11	*Call*	$100	$100	10%	14%	3	-
12	*Call*	$100	$100	10%	14%	12	-
13	*Call*	$100	$100	40%	5%	3	-
14	*Call*	$100	$100	40%	5%	12	-
15	*Call*	$100	$100	40%	14%	3	-
16	*Call*	$100	$100	40%	14%	12	-
17	*Call*	$100	$120	10%	5%	3	-
18	*Call*	$100	$120	10%	5%	12	-
19	*Call*	$100	$120	10%	14%	3	-
20	*Call*	$100	$120	10%	14%	12	-
21	*Call*	$100	$120	40%	5%	3	-
22	*Call*	$100	$120	40%	5%	12	-
23	*Call*	$100	$120	40%	14%	3	-
24	*Call*	$100	$120	40%	14%	12	-
25	*Put*	$100	$80	10%	5%	3	-
26	*Put*	$100	$80	10%	5%	12	-
27	*Put*	$100	$80	10%	14%	3	-
28	*Put*	$100	$80	10%	14%	12	-
29	*Put*	$100	$80	40%	5%	3	-
30	*Put*	$100	$80	40%	5%	12	-
31	*Put*	$100	$80	40%	14%	3	-

Lista das Opções Precificadas (Cont.)							
Numero	Tipo	*Spot*	*Strike*	Volatilidade	Taxa de Juros	Tempo (Meses)	Barreira
32	*Put*	$100	$80	40%	14%	12	-
33	*Put*	$100	$100	10%	5%	3	-
34	*Put*	$100	$100	10%	5%	12	-
35	*Put*	$100	$100	10%	14%	3	-
36	*Put*	$100	$100	10%	14%	12	-
37	*Put*	$100	$100	40%	5%	3	-
38	*Put*	$100	$100	40%	5%	12	-
39	*Put*	$100	$100	40%	14%	3	-
40	*Put*	$100	$100	40%	14%	12	-
41	*Put*	$100	$120	10%	5%	3	-
42	*Put*	$100	$120	10%	5%	12	-
43	*Put*	$100	$120	10%	14%	3	-
44	*Put*	$100	$120	10%	14%	12	-
45	*Put*	$100	$120	40%	5%	3	-
46	*Put*	$100	$120	40%	5%	12	-
47	*Put*	$100	$120	40%	14%	3	-
48	*Put*	$100	$120	40%	14%	12	-
49	*Call Up Out*	$100	$100	10%	10%	3	$120
50	*Call Up Out*	$100	$100	10%	10%	12	$120
51	*Call Up Out*	$100	$100	40%	10%	3	$120
52	*Call Up Out*	$100	$100	40%	10%	12	$120
53	*Call Up In*	$100	$100	10%	10%	3	$120
54	*Call Up In*	$100	$100	10%	10%	12	$120
55	*Call Up In*	$100	$100	40%	10%	3	$120
56	*Call Up In*	$100	$100	40%	10%	12	$120
57	*Call Down Out*	$100	$100	10%	10%	3	$80
58	*Call Down Out*	$100	$100	10%	10%	12	$80
59	*Call Down Out*	$100	$100	40%	10%	3	$80
60	*Call Down Out*	$100	$100	40%	10%	12	$80
61	*Call Down In*	$100	$100	10%	10%	3	$80
62	*Call Down In*	$100	$100	10%	10%	12	$80
63	*Call Down In*	$100	$100	40%	10%	3	$80
64	*Call Down In*	$100	$100	40%	10%	12	$80
65	*Put Up Out*	$100	$100	10%	10%	3	$120

Lista das Opções Precificadas (Cont.)

Numero	Tipo	*Spot*	*Strike*	Volatilidade	Taxa de Juros	Tempo (Meses)	Barreira
66	*Put Up Out*	$100	$100	10%	10%	12	$120
67	*Put Up Out*	$100	$100	40%	10%	3	$120
68	*Put Up Out*	$100	$100	40%	10%	12	$120
69	*Put Up In*	$100	$100	10%	10%	3	$120
70	*Put Up In*	$100	$100	10%	10%	12	$120
71	*Put Up In*	$100	$100	40%	10%	3	$120
72	*Put Up In*	$100	$100	40%	10%	12	$120
73	*Put Down Out*	$100	$100	10%	10%	3	$80
74	*Put Down Out*	$100	$100	10%	10%	12	$80
75	*Put Down Out*	$100	$100	40%	10%	3	$80
76	*Put Down Out*	$100	$100	40%	10%	12	$80
77	*Put Down In*	$100	$100	10%	10%	3	$80
78	*Put Down In*	$100	$100	10%	10%	12	$80
79	*Put Down In*	$100	$100	40%	10%	3	$80
80	*Put Down In*	$100	$100	40%	10%	12	$80

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA

ANEXOS B – PREÇOS OBTIDOS COM CADA MODELO

Lista das Opções Precificadas

Nr	Controle	Black and Scholes			Binomial			Trinomial			Monte Carlo		
		Preço	Tempo	Erro	Preço	Tempo	Erro	Preço	Tempo	Erro	Preço	Tempo	Erro
1	$20.9941	$20.9938	00:00	0.0003	$20.9938	00:00	0.0003	$20.9938	00:00	0.0003	$20.9819	00:19	0.0122
2	$23.9163	$23.9100	00:00	0.0063	$23.9100	00:03	0.0063	$23.9100	00:03	0.0063	$23.9055	00:19	0.0108
3	$22.7482	$22.7516	00:00	0.0034	$22.7516	00:00	0.0034	$22.7516	00:01	0.0034	$22.7506	00:18	0.0024
4	$30.4532	$30.4516	00:00	0.0016	$30.4516	00:03	0.0016	$30.4516	00:04	0.0016	$30.4396	00:19	0.0136
5	$22.0443	$22.0330	00:00	0.0113	$22.0333	00:00	0.0110	$22.0334	00:00	0.0109	$21.9483	00:19	0.0960
6	$28.9709	$28.9764	00:00	0.0055	$28.9769	00:03	0.0060	$28.9769	00:04	0.0060	$28.9820	00:18	0.0111
7	$23.5562	$23.5650	00:00	0.0088	$23.5652	00:00	0.0090	$23.5654	00:00	0.0092	$23.5323	00:19	0.0239
8	$33.7220	$33.7133	00:00	0.0087	$33.7136	00:03	0.0084	$33.7136	00:03	0.0084	$33.7053	00:19	0.0167
9	$2.6673	$2.6648	00:00	0.0025	$2.6642	00:00	0.0031	$2.6643	00:00	0.0030	$2.6574	00:19	0.0099
10	$6.7988	$6.8050	00:00	0.0062	$6.8046	00:03	0.0058	$6.8047	00:04	0.0059	$6.8127	00:18	0.0139
11	$4.1375	$4.1413	00:00	0.0038	$4.1406	00:01	0.0031	$4.1408	00:00	0.0033	$4.1509	00:18	0.0134
12	$13.4076	$13.4058	00:00	0.0018	$13.4054	00:03	0.0022	$13.4055	00:04	0.0021	$13.3971	00:18	0.0105
13	$8.5601	$8.5526	00:00	0.0075	$8.5500	00:01	0.0101	$8.5506	00:00	0.0095	$8.5249	00:19	0.0352
14	$18.0202	$18.0230	00:00	0.0028	$18.0217	00:03	0.0015	$18.0220	00:04	0.0018	$18.0583	00:18	0.0381
15	$9.6599	$9.6675	00:00	0.0076	$9.6648	00:00	0.0049	$9.6655	00:00	0.0056	$9.6666	00:19	0.0067
16	$22.2385	$22.2332	00:00	0.0053	$22.2319	00:03	0.0066	$22.2322	00:03	0.0063	$22.2269	00:19	0.0116
17	$0.0005	$0.0005	00:00	0.0000	$0.0005	00:00	0.0000	$0.0005	00:00	0.0000	$0.0005	00:19	0.0000
18	$0.4602	$0.4625	00:00	0.0023	$0.4621	00:03	0.0019	$0.4624	00:04	0.0022	$0.4637	00:18	0.0035
19	$0.0025	$0.0025	00:00	0.0000	$0.0024	00:00	0.0001	$0.0024	00:00	0.0001	$0.0025	00:19	0.0000
20	$2.2756	$2.2716	00:00	0.0040	$2.2700	00:03	0.0056	$2.2707	00:03	0.0049	$2.2652	00:19	0.0104
21	$2.3868	$2.3910	00:00	0.0042	$2.3923	00:00	0.0055	$2.3919	00:00	0.0051	$2.3802	00:19	0.0066
22	$10.8024	$10.8060	00:00	0.0036	$10.8071	00:03	0.0047	$10.8068	00:03	0.0044	$10.8525	00:19	0.0501
23	$2.8828	$2.8815	00:00	0.0013	$2.8828	00:00	0.0000	$2.8824	00:00	0.0004	$2.8887	00:19	0.0059
24	$14.1318	$14.1224	00:00	0.0094	$14.1233	00:03	0.0085	$14.1231	00:04	0.0087	$14.1185	00:18	0.0133
25	$0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:19	0.0000
26	$0.0083	$0.0083	00:00	0.0000	$0.0083	00:02	0.0000	$0.0083	00:04	0.0000	$0.0085	00:18	0.0002
27	$0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:19	0.0000
28	$0.0003	$0.0003	00:00	0.0000	$0.0003	00:02	0.0000	$0.0003	00:04	0.0000	$0.0002	00:19	0.0001
29	$1.0393	$1.0392	00:00	0.0001	$1.0395	00:00	0.0002	$1.0397	00:00	0.0004	$1.0367	00:19	0.0026
30	$5.0700	$5.0748	00:00	0.0048	$5.0752	00:03	0.0052	$5.0753	00:03	0.0053	$5.0610	00:19	0.0090
31	$0.8151	$0.8134	00:00	0.0017	$0.8137	00:00	0.0014	$0.8138	00:01	0.0013	$0.8122	00:18	0.0029

Lista das Opções Precificadas (Cont.)

Nr	Controle	Black and Scholes			Binomial			Trinomial			Monte Carlo		
		Preço	Tempo	Erro	Preço	Tempo	Erro	Preço	Tempo	Erro	Preço	Tempo	Erro
32	$3.2578	$3.2619	00:00	0.0041	$3.2623	00:03	0.0045	$3.2623	00:03	0.0045	$3.2458	00:19	0.0120
33	$1.4229	$1.4226	00:00	0.0003	$1.4219	00:00	0.0010	$1.4221	00:00	0.0008	$1.4276	00:19	0.0047
34	$1.9281	$1.9279	00:00	0.0002	$1.9275	00:03	0.0006	$1.9276	00:03	0.0005	$1.9310	00:19	0.0029
35	$0.7020	$0.7019	00:00	0.0001	$0.7011	00:00	0.0009	$0.7013	00:00	0.0007	$0.7042	00:19	0.0022
36	$0.3416	$0.3416	00:00	0.0000	$0.3412	00:02	0.0004	$0.3413	00:04	0.0003	$0.3421	00:18	0.0005
37	$7.3101	$7.3104	00:00	0.0003	$7.3077	00:01	0.0024	$7.3084	00:00	0.0017	$7.3071	00:18	0.0030
38	$13.1558	$13.1459	00:00	0.0099	$13.1446	00:02	0.0112	$13.1449	00:04	0.0109	$13.1351	00:18	0.0207
39	$6.2227	$6.2280	00:00	0.0053	$6.2254	00:00	0.0027	$6.2260	00:00	0.0033	$6.2126	00:19	0.0101
40	$9.1645	$9.1690	00:00	0.0045	$9.1677	00:03	0.0032	$9.1681	00:03	0.0036	$9.1872	00:18	0.0227
41	$18.5091	$18.5098	00:00	0.0007	$18.5098	00:00	0.0007	$18.5098	00:00	0.0007	$18.5058	00:19	0.0033
42	$14.6031	$14.6100	00:00	0.0069	$14.6097	00:03	0.0066	$14.6099	00:03	0.0068	$14.6046	00:19	0.0015
43	$15.8795	$15.8751	00:00	0.0044	$15.8751	00:00	0.0044	$15.8751	00:00	0.0044	$15.8704	00:19	0.0091
44	$6.5920	$6.5946	00:00	0.0026	$6.5930	00:03	0.0010	$6.5937	00:03	0.0017	$6.5830	00:19	0.0090
45	$20.9015	$20.9003	00:00	0.0012	$20.9017	00:00	0.0002	$20.9012	00:01	0.0003	$20.8822	00:18	0.0193
46	$24.9622	$24.9535	00:00	0.0087	$24.9546	00:03	0.0076	$24.9543	00:03	0.0079	$24.8997	00:19	0.0625
47	$18.7499	$18.7542	00:00	0.0043	$18.7554	00:00	0.0055	$18.7550	00:00	0.0051	$18.7594	00:19	0.0095
48	$18.4441	$18.4454	00:00	0.0013	$18.4463	00:03	0.0022	$18.4460	00:03	0.0019	$18.4416	00:19	0.0025
49	$3.4187	$3.4186	00:00	0.0001	$3.4201	00:00	0.0014	$3.4180	00:00	0.0007	$3.4167	00:18	0.0020
50	$4.3211	$4.3217	00:00	0.0006	$4.3233	00:00	0.0022	$4.3222	00:01	0.0011	$4.3376	00:18	0.0165
51	$1.1476	$1.1485	00:00	0.0009	$1.1538	00:00	0.0062	$1.1437	00:00	0.0039	$1.1499	00:18	0.0023
52	$0.1928	$0.1926	00:00	0.0002	$0.1913	00:01	0.0015	$0.1917	00:01	0.0011	$0.1919	00:18	0.0009
53	$0.0275	$0.0270	00:00	0.0005	$0.0263	00:00	0.0012	$0.0264	00:00	0.0011	$0.0267	00:18	0.0008
54	$5.9893	$5.9864	00:00	0.0029	$5.9841	00:01	0.0052	$5.9854	00:00	0.0039	$5.9698	00:18	0.0195
55	$8.0061	$8.0144	00:00	0.0083	$8.0142	00:01	0.0081	$8.0152	00:00	0.0091	$8.0298	00:19	0.0237
56	$20.1284	$20.1259	00:00	0.0025	$20.1246	00:01	0.0038	$20.1248	00:01	0.0036	$20.0146	00:18	0.1138
57	$3.4478	$3.4456	00:00	0.0022	$3.4464	00:00	0.0014	$3.4445	00:00	0.0033	$3.4402	00:18	0.0076
58	$10.2993	$10.3081	00:00	0.0088	$10.3074	00:01	0.0081	$10.3076	00:01	0.0083	$10.3455	00:18	0.0462
59	$9.0710	$9.0683	00:00	0.0027	$9.0731	00:00	0.0021	$9.0648	00:00	0.0062	$9.0910	00:18	0.0200
60	$17.2787	$17.2781	00:00	0.0006	$17.2770	00:01	0.0017	$17.2773	00:01	0.0014	$17.3405	00:18	0.0618
61	$0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:18	0.0000
62	$0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:01	0.0000	$0.0000	00:18	0.0000
63	$0.0947	$0.0946	00:00	0.0001	$0.0949	00:01	0.0002	$0.0941	00:00	0.0006	$0.0945	00:18	0.0002
64	$3.0397	$3.0404	00:00	0.0007	$3.0388	00:00	0.0009	$3.0392	00:01	0.0005	$3.0395	00:18	0.0002
65	$0.9761	$0.9765	00:00	0.0004	$0.9774	00:00	0.0013	$0.9755	00:00	0.0006	$0.9792	00:19	0.0031

Lista das Opções Precificadas (Cont.)

Nr	Controle	Black and Scholes			Binomial			Trinomial			Monte Carlo		
		Preço	Tempo	Erro	Preço	Tempo	Erro	Preço	Tempo	Erro	Preço	Tempo	Erro
66	$0.7911	$0.7918	00:00	0.0007	$0.7910	00:01	0.0001	$0.7912	00:00	0.0001	$0.7915	00:18	0.0004
67	$6.4613	$6.4531	00:00	0.0082	$6.4576	00:00	0.0037	$6.4502	00:00	0.0111	$6.4530	00:19	0.0083
68	$7.9349	$7.9415	00:00	0.0066	$7.9409	00:00	0.0060	$7.9411	00:01	0.0062	$7.9509	00:18	0.0160
69	$0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:18	0.0000
70	$0.0001	$0.0001	00:00	0.0000	$0.0001	00:01	0.0000	$0.0001	00:00	0.0000	$0.0001	00:18	0.0000
71	$0.2409	$0.2408	00:00	0.0001	$0.2414	00:00	0.0005	$0.2398	00:00	0.0011	$0.2412	00:18	0.0003
72	$2.8589	$2.8607	00:00	0.0018	$2.8587	00:01	0.0002	$2.8592	00:01	0.0003	$2.8572	00:18	0.0017
73	$0.9761	$0.9765	00:00	0.0004	$0.9774	00:00	0.0013	$0.9754	00:00	0.0007	$0.9787	00:19	0.0026
74	$0.7566	$0.7563	00:00	0.0003	$0.7555	00:00	0.0011	$0.7557	00:01	0.0009	$0.7522	00:18	0.0044
75	$1.8055	$1.8037	00:00	0.0018	$1.8088	00:00	0.0033	$1.8017	00:00	0.0038	$1.8029	00:19	0.0026
76	$0.3569	$0.3566	00:00	0.0003	$0.3550	00:01	0.0019	$0.3560	00:01	0.0009	$0.3557	00:18	0.0012
77	$0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:00	0.0000	$0.0000	00:01	0.0000	$0.0000	00:18	0.0000
78	$0.0357	$0.0356	00:00	0.0001	$0.0356	00:01	0.0001	$0.0356	00:01	0.0001	$0.0364	00:18	0.0007
79	$4.8851	$4.8902	00:00	0.0051	$4.8902	00:00	0.0051	$4.8882	00:01	0.0031	$4.9055	00:18	0.0204
80	$10.4402	$10.4456	00:00	0.0054	$10.4446	00:01	0.0044	$10.4442	00:01	0.0040	$10.4170	00:19	0.0232

Fonte: Elaborado pelo Autor, utilizando o SiPA